УДК 681.511.4

УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ, В ЗАДАЧЕ СЛЕЖЕНИЯ

В.Н. Афанасьев
Национальный Исследовательский Университет Высшая школа экономики
Россия, 109028, Москва, Большой Трехсвятительский пер., 3
E-mail: afanval@mail.ru

Ключевые слова: дифференциальные игры, нелинейные системы, расширенная линеаризация, оптимальное управление, гарантирующее управление

Аннотация: Проблема управления в задаче слежения формулируется для класса нелинейных объектов представимых в виде объектов с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния. Предполагается, что система подвергается неконтролируемым ограниченным возмущениям и задача рассматривается в ключе дифференциальных игр. Поиск оптимальных параметров регулятора сводится к необходимости решения некоторого векторного нелинейного уравнения с определенным правилом нахождения начальных условий. Параметры субоптимального регулятора находятся из решений двух дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями и параметрами, зависящими от состояния. Предложен метод конструирования гарантирующего управления, не требующий решения нелинейных дифференциальных уравнений с параметрами, зависящими от состояния, и обеспечивающий приемлемые переходные характеристики.

1. Введение

Результаты синтеза оптимального управления линейными объектами в задаче слежения за желаемой траекторией в терминальной постановке и квадратическим функционалом качества были представлены, судя по литературе, в работе Р. Калмана в 1963 году [1]. При этом предполагалось, что параметры системы известны, какие либо возмущения отсутствуют. Было показано, что оптимальное управление для этой задачи существует, единственно и параметры регулятора находятся из решений матричного дифференциального уравнения типа Риккати, которое полностью определяется заданием системы, весовыми коэффициентами функционала качества и конечного времени и линейного векторного дифференциального уравнения, в правую часть которого входит желаемая траектория. Для обоих уравнений граничные условия задаются на правом конце. Последнее означает, что желаемая траектория должна быть определена на всем интервале управления, что делает, в общем случае, построение оптимального регулятора нереализуемым.

В статье управление нелинейным объектом, подвергающимся неконтролируемым ограниченным возмущениям, задача слежения рассматривается в ключе дифференциальной игры, что позволяет получить конструктивные решения в классе управлений с гарантирующим результатом. Начало развития теории дифференциальных игр относят к 1965 году, когда была опубликована работа Р. Айзекса (на русском языке книга [2] была опубликована в 1967 году). В работах Н.Н. Красовского и его учеников метод дифференциальных игр разрабатывался не только для задач преследования и наведения, но для задач минимаксного управления [3, 4] − управления с гарантирующим результатом. В подобных работах игра рассматривается с одним игроком, вторым же игроком является возмущение, действующее на объект. Основная проблема, возникающая при реализации теоретических положений дифференциальных игр, связана с трудностями поиска решений уравнения Гамильтона-Якоби-Айзекса − скалярного уравнения в частных производных. В силу этого, в основных работах теории дифференциальных игр, конфликтующие участники игры описываются линейными дифференциальными уравнениями, и функционалы задаются квадратическими [5].

В данной работе проблема управления в задаче слежения формулируется для класса нелинейных объектов представимых в виде объектов с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния. Линейность структуры преобразованной нелинейной системы и квадратичный функционал качества позволяют при синтезе оптимального управления перейти от необходимости поиска решений уравнение Гамильтона-Якоби-Айзекса к некоторому векторному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению с начальным условием, определяемым начальными условиями объекта.

Впервые, судя по ссылкам, встречающимся в публикациях по использованию метода представления нелинейных объектов в виде линейных моделей с параметрами, зависящими от состояния, и функционалами, матрицы штрафа которых также зависят от состояния объекта, была сформулирована вначале 60-х г. XX в. [8]. С конца 1990-х гг. этот метод привлекает все большее внимание ученых и практиков. К настоящему моменту опубликовано достаточно большое количество теоретических работ и примеров успешного использования этого метода при построении систем управления подвижными объектами, производственными и экологическими системами [9-13].

Представленная работа организована следующим образом. В разделе 2 определяется класс математических моделей, описывающих нелинейные объекты, рассматриваемые в статье, вводится квадратический функционал качества, осуществляется постановка задачи управления. В разделе 3 осуществляется синтез управляющих воздействий и выписываются уравнения, которым должны отвечать параметры оптимального регулятора. В разделе 4 рассматриваются вопросы организации субоптимальнгого управления нелинейным объектом. В разделе 5 конструируется гарантирующее управление с использованием мажорирующей модели нелинейной системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим детерминированную нелинейную систему

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t),\ x(t_0) = x_0, \\ &y(t) = Cx(t)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ состояние системы; $x \in \Omega_x$, $X_0 \in \Omega_x$ − множество возможных начальных условий системы; $y \in R^m, m \le n$ − выход системы; $u \in R^r$ управление; $w \in R^k$ − возмущение; $f(x),\ g_1(x),\ g_2(x)$ − непрерывные и действительные матрицы. Предполагается, что для всех (x) система (1) управляема и наблюдаема [14], $t \in R^+$. Кроме того, будем полагать, что функции $f(x),\ g_1(x),\ g_2(x)$ достаточно гладкие (C_∞) такие, что через любые $(0,x_0)\in t\times\Omega_x$ проходило бы одно и только одно решение уравнения (1) $x(t,0,x_0)$ и был бы единственным соответствующий выход системы $y(t)=Cx(t,x_0)$.

Предполагается, что неконтролируемое возмущение $w(t)$ характеризуется следующими соотношениями: $\left|w_i(t)\right|\le\sigma_i(x(t)), i=1,...,k,\ t\ge 0$, где $\sigma_i(x(t))\ge 0$ для всех $x(t)\in\Omega_x$. Эти условия запишем в виде

(2) $$\left|w(t)\right|\preceq\sigma(x(t)),\ \forall\ t\ge 0.$$

В основе методологии формирования математической модели исходного нелинейного объекта (1) лежит «расширенная линеаризация», называемая также как «параметризация системы коэффициентами, зависящими от состояния» (State Dedependent Coefficients-линеаризация) [12].

Предположение 1. Функции $f(x)$ и $\partial f(x)/\partial x_i,\ i=1,...,n$ непрерывны по $x\in\Omega_x$ и $f(0)=0$.

Предположение 2. Матрицы $g_1(x),\ g_2(x)$ и $\partial g_1(x)/\partial x_i,\ \partial g_1(x)/\partial x_i,\ i=1,...,n$ непрерывны по $x\in\Omega_x$ и $g_1(x)\ne 0$, $g_2(x)\ne 0$, $x\in\Omega_x$.

При выполнении Предположений 1 и 2, используя SDC-линеаризацию, исходная нелинейная система (1) может быть представлена в виде модели системы

(3) $$\frac{d}{dt}x(t)=A(x)x(t)+g_1(x)w(t)+g_2(x)u(t),\ x(0)=x_0,$$
$$y(t)=Cx(t),$$

которая имеет линейную структуру и $A(x)x(t)=f(x)$. Отметим, что такое представление вектора $f(x)$ не является уникальным.

Предположение 3. Система (3) для $\forall x\in\Omega_x$ является управляемой и наблюдаемой.

Пусть $z(t)\in R^m$ есть «желаемая» траектория выхода системы $y(t)$ и

(4) $$\frac{d}{dt}z(t)=G(t)z(t)+n(t),\ z(0)=z_0,$$

где $G(t)$ − действительная и непрерывная матрица, $n(t)\in R^m$ − процесс (детерминированный или стохастический), под воздействием которого происходит изменение «желаемой» траектории. Тогда рассогласование между выходом системы и желаемой траекторией будет

(5) $$\varepsilon(t)=z(t)-y(t).$$

Рассматривая возмущение $w(t)$ как действие некоторого игрока противодействующему успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры двух игроков U и W. Организация управлений $u(t)\in U$ и $w(t)\in W$ будет осуществляться с использованием принципа обратной связи по состоянию. Введем функционал качества дифференциальной игры

(6) $$J(\varepsilon,u,w)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\{\varepsilon^T(t)Q\,\varepsilon(t)+u^T(t)R\,u(t)-w^T(t)Pw(t)\right\}dt.$$

Задача заключается в построении оптимальной стратегии с обратной связью для игроков U и W. Симметрическая матрица Q, по крайней мере, положительно полуопределенная. Ограничения на управляющие воздействия учитываются при назначении положительно определенных матриц P и R. Дополнительные требования к значениям параметров матриц $Q,\ R$ и P будут определены ниже.

Таким образом, задача, рассматриваемая в работе, заключается в нахождении управляющего воздействия $u(t)$, минимизирующего функционал вида (1) на объекте (3) при соответствующем противодействии «управления» $w(t)$.

3. Оптимальное решение задачи управления

В настоящем разделе функционал качества имеет вид (4). Решение задачи, поставленной в разделе 2, существует на множестве Ω_X, если существует непрерывная положительно определенная функция $V:\Omega_X \to R^+$, определенная в виде

(7) $$V(x) = \min_u \max_w J(\varepsilon, u, w)$$

для всех $x \in \Omega_X$ и допустимых управлений $u(t) \in U$ и $w(t) \in W$.

В идеале, значение назначаемой функции V есть стационарное решение задачи динамического программирования, связанное с дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных Гамильтона-Якоби-Айзекса

$$\frac{\partial V(x)}{\partial t} + \min_u \max_w H\left\{\varepsilon, u, w, \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\right\} = 0,\ \ V(x(T)) = \frac{1}{2}\varepsilon^T(T)F\varepsilon(T),$$

где H − гамильтониан

(8) $$\begin{aligned} H = \min_u \max_w \Bigg\{ & \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\Big\{\Big[f(x) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t)\Big] + \\ & + \frac{1}{2}\Big[\varepsilon(t)^T Q\,\varepsilon(t) + u^T(t)Ru(t) - w^T(t)Pw^T(t)\Big]\Bigg\}. \end{aligned}$$

Оптимальное решение определяется решением двухточечной краевой задачи [14]

(9) $$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}x(t) = \partial H(\varepsilon, u, w, \lambda)/\partial\lambda(t),\ \ x(t_0) = x_0, \\ & \frac{d}{dt}\lambda(t) = -\partial H(\varepsilon, u, w, \lambda)/\partial x(t),\ \ \lambda(T) = \lambda_T, \\ & \partial H(\varepsilon, u, w, \lambda)/\partial u(t) = 0,\ \ \partial H(\varepsilon, u, w, \lambda)/\partial w(t) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\lambda(t) = \left[\partial V(x)/\partial x(t)\right]^T$. Вспомогательная переменная $\lambda(t)$ и ее краевое значение $\lambda(T)$ будут определяться соотношениями

(10) $$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\lambda(t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\right\}^T = -\left\{\frac{\partial H(\varepsilon, u, w, \lambda)}{\partial x(t)}\right\}^T = -C^T Q(x)\,Cx(t) - \\ & -\left\{\left[\frac{\partial\big(A(x)x(t)\big)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial\big(g_1(x)w(t)\big)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial\big(g_2(x)u(t)\big)}{\partial x}\right]^T\right\}\lambda(t). \end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{\partial\left(A(x)x\right)}{\partial x}=A(x)+\begin{bmatrix}\frac{\partial A_{1*}(x)}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial A_{1*}(x)}{\partial x_n}\\ . & . & & & .\\ . & & . & & .\\ . & & & . & .\\ \frac{\partial A_{n*}(x)}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial A_{n*}(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}\otimes x(t),$$

$A_{i*}(x)$, $i=1,...,n$ − строка матрицы $A(x)$ и $\otimes$ − символ кронекеровского произведения,

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x}w(t)=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_{1(1*)}(x)}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial g_{1(1*)}(x)}{\partial x_n}\\ . & . & & & .\\ . & & . & & . & .\\ . & & & . & .\\ \frac{\partial g_{1(k*)}(x)}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial g_{1(k*)}(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}\otimes w(t),$$

$g_{1(p*)}(x)$, $j=1,...,k$ − строка матрицы $g_1(x)$,

$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x}u(t)=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_{2(1*)}(x)}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial g_{2(1*)}(x)}{\partial x_n}\\ . & . & & & .\\ . & & . & & .\\ . & & & . & .\\ \frac{\partial g_{2(r*)}(x)}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial g_{2(r*)}(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}\otimes u(t),$$

$g_{2(l*)}(x)$, $l=1,...,r$ − строка матрицы $g_2(x)$.

Оптимальные управления определяются соотношениями

$$\left\{\frac{\partial H}{\partial w(t)}\right\}^T=-Pw(t)+g_1^T(x)\lambda(t)=0,\ \left\{\frac{\partial H}{\partial u(t)}\right\}^T=Ru(t)+g_2^T(x)\lambda(t)=0,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial w^2(t)}=-P<0,\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)}=R>0.$$

Откуда

$$w(t)=P^{-1}g_1^T(x)\lambda(t),\ u(t)=-R^{-1}g_2^T(x)\lambda(t).$$

Будем искать $\lambda(t)$ в виде

(11) $$\lambda(t)=S(x)x(t)+q(x).$$

Тогда оптимальные управления будут определяться соотношениями

(12) $$w(t)=P^{-1}g_1^T(x)\left[S(x)x(t)+q(x)\right],\ u(t)=-R^{-1}g_2^T(x)\left[S(x)x(t)+q(x)\right].$$

Управления (12) описывают стратегию с обратной связью для игроков W и U как функции текущего состояния.

Для отыскания матрицы $S(x)$ используем метод обратной прогонки. Продифференцировав (11) по t, получим

(13)
$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=\left\{\frac{d}{dt}S(x)\right\}x(t)+S(x)\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}+\frac{d}{dt}q(x)=$$
$$=\left\{\frac{d}{dt}S(x)\right\}x(t)+S(x)A(x)x(t)-S(x)\Pi(x)\left[S(x)+q(x)\right]+\frac{d}{dt}q(x),$$

где

$$\frac{d}{dt}S(x)=\sum_{i=1}^{n}S_{x_i}(x)\left\{\frac{d}{dt}x_i(t)\right\},\ \frac{d}{dt}q(x)=\sum_{i=1}^{n}q_{x_i}(x)\left\{\frac{d}{dt}x_i(t)\right\},$$
$$\Pi(x)=\left[g_2(x)R^{-1}g_2^T(x)-g_1(x)P^{-1}g_1^T(x)\right].$$

Уравнение (10) с учетом (12) и сделанных обозначений будет иметь вид

(14)
$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-C^TQ\,Cx(t)+C^TQz(t)-A^T(x)\left[S(x)+q(x)\right]-$$
$$-\left\{\left[\frac{\partial\left(A(x)\right)}{\partial x}\right]^T+\left[\frac{\partial\left(g_1(x)w(t)\right)}{\partial x}\right]^T+\left[\frac{\partial\left(g_2(x)u(t)\right)}{\partial x}\right]^T\right\}\left[S(x)+q(x)\right].$$

Приравнивая (13) и (14), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-C^TQ\,Cx(t)+C^TQz(t)-A^T(x)\left[S(x)+q(x)\right]-$$
$$-\left\{\left[\frac{\partial\left(A(x)\right)}{\partial x}\right]^T+\left[\frac{\partial\left(g_1(x)w(t)\right)}{\partial x}\right]^T+\left[\frac{\partial\left(g_2(x)u(t)\right)}{\partial x}\right]^T\right\}\left[S(x)+q(x)\right]=$$
$$=\left\{\frac{d}{dt}S(x)\right\}x(t)+S(x)A(x)x(t)-S(x)\Pi(x)\left[S(x)+q(x)\right]+\frac{d}{dt}q(x)$$

или

(15)
$$\left[\frac{d}{dt}S(x)+A(x)S(x)+S(x)A^T(x)-S(x)\Pi(x)S(x)+C^TQ\,C\right]x(t)+$$
$$+\left[\frac{d}{dt}q(x)+\left[A^T(x)-S(x)\Pi(x)\right]q(x)-C^TQz(t)\right]+\left\{\left[\frac{\partial\left(A(x)\right)}{\partial x}\right]^T\otimes x(t)+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial\left(g_1(x)\right)}{\partial x}\right]^T\otimes w(t)+\left[\frac{\partial\left(g_2(x)\right)}{\partial x}\right]^T\otimes u(t)\right\}\left[S(x)x(t)+q(x)\right]=0.$$

Решения полученного уравнения относительно $S(x)$ и $q(x)$ образуют пространства гомотопные пространству состояний системы

(16)
$$\frac{d}{dt}x(t)=A(x)x(t)-\Pi(x)\left[S(x)x(t)+q(x)\right],\ x(t_0)=x_0,$$
$$y(t)=C(x)x(t).$$

Таким образом, начальные состояния $S(x_0)$ и $q(x_0)$ для уравнения (15) полностью определяются заданием начального состояния системы $x(t_0)$ и решение этого уравнения, с входящей в него желаемой траекторией $z(t)$, и само состояние системы $x(t)$ определяют оптимальные управления вида (12).

Предположение 4. Симметрическая матрица $\Pi(x)=\left[g_2(x)R^{-1}g_2^T(x)-g_1(x)P^{-1}g_1^T(x)\right]$ при всех $x\in\Omega_x$, по крайней мере, положительно полуопределенная.

Отметим, что управления (2.6) обеспечивают системе устойчивость при условии, при условии выполнения Предположения 4. Для определения условий, при которых выполняется это предположение, рассмотрим систему с обратной связью по состоянию:

$$\frac{d}{dt}\mu(t)=\left[A(\mu)-\Pi(\mu)S(\mu)\right]\mu,\ \ \mu(t_0)=x_0\,. \tag{17}$$

Как следует из второй теоремы Ляпунова, что если выполняется следующее условие

$$\frac{dV(\mu)}{dt}=\frac{\partial V(\mu)}{\partial\mu}\frac{d\mu(t)}{dt}\le-\omega_3\{|\mu|\}, \tag{18}$$

то система устойчива. Принимая во внимание (17), перепишем условие (18)

$$\frac{\partial V(\mu)}{\partial\mu}\left[A(\mu)-\Pi(\mu)S(\mu)\right]\mu\le-\omega_3\{\mu\}\,. \tag{19}$$

Назначим $V(\mu)$ в виде $V(\mu)=\mu^T(t)S(\mu)\mu(t)$ и $\omega_3\{|\mu|\}$ в виде $\omega_3\{\mu\}=\mu^T(t)C^TQC\mu(t)$.

После ряда трансформаций неравенство (19) будем иметь вид

$$\frac{d}{dt}V(\mu)=-\mu^T(t)S(\mu)\Pi(\mu)S(\mu)\mu(t)\le 0,\ \ \forall\mu\,.$$

Откуда следует, что матрица $\Pi(\mu)=\left[g_2(\mu)R^{-1}g_2^T(\mu)-g_1(\mu)P^{-1}g_1^T(\mu)\right]$, обеспечивающая устойчивость системе, по крайней мере, положительно полуопределенная и собственные значения замкнутой следящей системы (16) тождественны собственным значениям замкнутой оптимальной системы (17) и не зависят от желаемой траектории $z(t)$. Как видно, выполнение этого условия можно осуществить соответствующим назначением матриц R и P.

Для отыскания значения функционала качества при оптимальных управлениях добавим к подынтегральному выражению функционала (6) выражение $1/2\,d\left\{x^T(t)\left[S(x)x(t)+q(x)\right]\right\}/dt$, компенсировав это добавление вне интеграла

$$1/2\left[x^T(t_0)S(x(t_0))x(t_0)+x^T(t_0)q(x(t_0))-x^T(T)S(x(T))x(T)-x^T(T)q(x(T))\right].$$

Будем иметь с учетом (15)

$$\begin{aligned}&J(\varepsilon,u,w)=J^*(\varepsilon(t),t)=\\&=\frac{1}{2}\left\{x^T(t_0)\left[S(x(t_0))x(t_0)+q(x(t_0))\right]-x^T(t)\left[S(x(t))x(t)-q(x(t))\right]\right\}-\frac{d}{dt}\varphi(x),\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\varphi(x)=\frac{1}{2}\Bigg[\ z^T(t)Q\,\varepsilon(t)+x^T(t)\Bigg\{\left[\frac{\partial\left(A(x)\right)}{\partial x}\right]^T\otimes x(t)+\\&+\left[\frac{\partial\left(g_1(x)\right)}{\partial x}\right]^T\otimes\left\{P^{-1}g_1^T(x)\left[S(x)x(t)+q(x)\right]\right\}-\\&-\left[\frac{\partial\left(g_2(x)\right)}{\partial x}\right]^T\otimes\left\{R^{-1}g_2^T(x)\left[S(x)x(t)+q(x)\right]\right\}\Bigg\}\left[S(x)x(t)+q(x)\right]\ \Bigg],\ \ \varphi(x_0)=\varphi_0.\end{aligned} \tag{21}$$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть нелинейная система (1) представима динамической моделью (3) с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния, и задан функционал (6).

Пусть также матрица $S(x)$ и вектор $q(x)$ есть решения уравнения (15) с начальным условием $S_0 = S(x_0)$, $q_0 = q(x_0)$. Тогда оптимальные управления вида (12) существуют, и минимальная стоимость в управляемого процесса определяется выражениями (20), (21).

4. Субоптимальное решение задачи управления

Предположение 5. Модель системы (16), в которой положительно определенная матрица $\hat{S}(x)$ и вектор $\hat{q}(x$ определяются решениями уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{S}(x) + A(x)\hat{S}(x) + \hat{S}(x)A^T(x) - \hat{S}(x)\Pi(x)\hat{S}(x) + C^T Q\, C = 0,\ \hat{S}(x_0) = S_0, \\ &\frac{d}{dt}\hat{q}(x) + \left[A^T(x) - \hat{S}(x)\Pi(x)\right]\hat{q}(x) - C^T Q z(t) = 0,\ \hat{q}(x_0) = q_0, \end{aligned} \tag{22}$$

устойчива, если симметрическая матрица

$$\Pi(x) = \left[g_2(x)R^{-1}g_2^T(x) - g_1(x)P^{-1}g_1^T(x)\right], \tag{23}$$

по крайней мере, положительно полуопределенная.

Управления в рассматриваемом случае будут определяться соотношениями

$$w(t) = P^{-1}g_1^T(x)\left[\hat{S}(x)x(t) + \hat{q}(x)\right],\ u(t) = -R^{-1}g_2^T(x)\left[\hat{S}(x)x(t) + \hat{q}(x)\right]. \tag{24}$$

Объект (1) с управлениями (24) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x) - \Pi(x)\left[\hat{S}(x)x(t) + \hat{q}(x)\right],\ x(t_0) = x_0, \\ &y(t) = Cx(t). \end{aligned} \tag{25}$$

Для нахождения условий назначения параметров управлений, при которых будет выполняются Предположения 4 и 5, можно повторить исследования, проведенные в разделе 4 с использованием второй теоремы Ляпунова. Пусть функция $V(x)$ имеет вид $V(x) = x^T(t)\left[\hat{S}(x)x(t) + \hat{q}(x)\right]$. Назначим $\omega_3\{|x|\}$ в виде $\omega_3\{|x|\} = y^T(t)Qy(t)$. После ряда трансформаций неравенство вида (19) принимает выражение

$$\frac{d}{dt}V(x) = -x^T(t)\hat{S}(x)\Pi(x)\hat{S}(x)x(t) - \hat{q}^T(x)\Pi(x)\hat{q}(x) - z^T(t)Q\left[y(t) - z(t)\right] \le 0.$$

Отсюда следует, что матрица $\Pi(x)$ должна быть, по крайней мере, положительно полуопределенной для $\forall x \neq 0$. Это условие при заданной матрице P и матрицах $g_1(x)$, $g_2(x)$ можно выполнить соответствующим назначением матрицы R.

Выражение для значения функционала качества при субоптимальных управлениях имеет вид

$$\begin{aligned} &J(x,u,w) = J^*(x(t),t) = \\ &= \frac{1}{2}\left[x^T(t_0)\hat{S}(x(t_0))x(t_0) + x^T(t_0)\hat{q}(x(t_0)) - x^T(t)\hat{S}(x(t))x(t) - x^T(t)\hat{q}(x(t))\right] - \frac{d}{dt}\varphi(x), \\ &\frac{d}{dt}\varphi(x) = \frac{1}{2}z^T(t)Q\left[z(t) - y(t)\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

В силу того, что краевые условия для уравнения (22) определяются начальными условиями системы $x(t_0)$, существует возможность нахождения текущих значений $S(x)$ и $q(x)$ в темпе функционирования объекта.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть нелинейная система (1) представима динамической моделью (3) с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния, и задан функционал (6). Пусть также матрица $\hat{S}(x)$ и вектор $\hat{q}(x)$ есть решения уравнений (22) с начальным условием $\hat{S}_0 = \hat{S}(x_0)$, $\hat{q}_0 = \hat{q}(x_0)$. Тогда оптимальные управления вида (24) существуют, и минимальная стоимость в управляемого процесса определяется выражениями (26).

В тех случаях, когда это сделать невозможно (многомерный объект, ограниченные вычислительные средства и т.п.), можно предложить «поточечные» решения этих уравнений. В этом случае управление будет квазистационарным, т.е.

$$w_i(t) = P^{-1} g_1^T(x_i)\left[\hat{S}(x_i)x(t) + \hat{q}(x_i)\right],\ u_i(t) = -R^{-1} g_2^T(x_i)\left[\hat{S}(x_i)x(t) + \hat{q}(x_i)\right], \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned} &A(x_i)\hat{S}(x_i) + \hat{S}(x_i)A^T(x_i) - \hat{S}(x_i)\Pi(x_i)\hat{S}(x_i) + C^T QC = 0, \\ &\hat{q}(x_i) = \left[A^T(x_i) - \hat{S}(x_i)\Pi(x_i)\right]^{-1} C^T Qz(t),\ i = 0,1,2,3,... \end{aligned} \tag{28}$$

Субоптимальная система с квазистационарными управлениями (27) имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x) - \Pi(x)\left[\hat{S}(x_i)x(t) + \hat{q}(x_i)\right],\ x(t_0) = x_0, \\ &y(t) = Cx(t)\ . \end{aligned} \tag{29}$$

6. Система управления с гарантирующим управлением

Отметим, что управление $u(t)$, определенное в разделах 3 и 4, должно быть оптимальным (субоптимальным), несмотря на действия игрока W, управление которого реализовано по принципу обратной связи и который может воспользоваться любым промахом (не оптимальным шагом) игрока U.

Прежде всего, рассмотрим вопрос об использовании информации о неконтролируемом возмущении $w(t)$ и начальных условиях $x(0)$. Эту информацию уместно использовать при назначении в функционале качества (2.5) матрицы штрафа P. Если имеется такое σ_i^*, что $\sigma_i^* \geq \sigma_i(x(t)),\ i = 1,...,k$, то диагональные элементы матрицы P можно назначить в виде $p_{ii} = 1/\sigma_i^*$, т.е. $P = P(\sigma^*) = P^*$. Тогда, с учетом последнего, матрица R должна назначаться так, чтобы выполнялось Предположение 4, т.е. матрица $\Pi(x) = \left[g_2(x)R^{-1}g_2^T(x) - g_1(x)\left\{P^*\right\}^{-1} g_1^T(x)\right],\ \forall x \neq 0$ была бы, по крайней мере, положительно полуопределенной.

Реализуемое решение задачи управления нелинейным объектом (1) с приемлемыми переходными характеристиками может быть получено с использованием метода гарантированного управления. Отметим, что оптимальные и субоптимальные управления $w(t)$ и $u(t)$ обеспечивают системе устойчивость [14]. В силу этого Ω_x − ограниченное замкнутое множество, что означает, что возможные изменения параметров матриц $A(x), g_1(x), g_2(x)$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству D_a, т.е. $a(x) = \left\{A(x), g_1(x), g_2(x)\right\} \in D_a$.

Пусть $a^* = \left\{A^*, g_1^*, g_2^*\right\} \in D_a$ − матрицы системы (3), содержащие «наименее благоприятные» для решения задачи управления значения параметров. Введем определение «наименее благоприятных значений» параметров матриц.

Так как матрица $A(x)$ − действительная, т.е. $A(x) \in M_n(R)$, и параметры матрицы зависят от состояния системы, то ее собственные значения непрерывно завися от элементов матрицы, а корни многочлена непрерывно зависят от матричных элементов, которые, в свою очередь, зависят от $x(t)$, т.е. $\lambda_i(x),\ i=1,...,n$ и $\lambda_1(x) \ge \lambda_2(x) \ge,...,\ge \lambda_n(x)$.

Определение 1. Под «наименее благоприятным значением матрицы $A(x)$» принимается матрица с постоянными элементами $x^* \in \Omega_x$, т.е. $A^* = A(x^*)$, имеющая наибольшее собственное действительное значение $\lambda_1^* = \lambda_1(x^*)$ (правый корень характеристического уравнения), т.е. $\mathrm{Re}\left[\lambda_1^*\right] \ge \mathrm{Re}\left[\lambda_1(x)\right],\ x \in \Omega_x$.

Представим один из возможных методов поиска $\mathrm{Re}\left[\lambda_1^*\right]$. Пусть квадратная матрица $A(x)$ принадлежит множеству $A(x) \in M_n(R)$. Отметим, что в общем случае матрица $A(x)$ не является симметрической. Очевидно, что если матрица $A(x)$ нормальная т.е. $A(x)A^T(x) = A^T(x)A(x)$, то, в соответствии с теоремой Шура, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = trA(x)$ [16].

Далее будем использовать соотношение Релея [16]. Для этого образуем симметрическую матрицу $W(x)$: $W(x) = 0{,}5\left[A(x) + A^T(x)\right] \in M_n(R)$. Будем обозначать характеристические числа матрицы $W(x)$: $\mathrm{Re}\left[\lambda_1^W(x)\right] \ge \mathrm{Re}\left[\lambda_2^W(x)\right] \ge ... \mathrm{Re} \ge \left[\lambda_n^W(x)\right]$. Не трудно видеть, что $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^W(x) = trA(x)$. В силу теоремы Бендиксона [16] имеем следующее соотношение корней $\lambda_i(x)$ и $\lambda_i^W(x)$: $\mathrm{Re}[\lambda_1^W(x)] \le \mathrm{Re}[\lambda_i(x)] \le \mathrm{Re}[\lambda_n^W(x)]$. Таким образом, качественное расположение корней $\lambda_i(x)$ по отношению к расположению корней $\lambda_i^W(x)$ на действительной оси не изменяется.

Определим единичную сферу Q в R^n как множество всех векторов, для которых $\langle z,z \rangle = 1$. Запишем соотношение Релея для $W(x)$

(30) $$R(z) = \frac{\langle z, W(x)z \rangle}{\langle z,z \rangle}.$$

Очевидно, если вместо z подставить kz, то соотношение Релея останется без изменения. С геометрической точки зрения можно сказать, что $R(z)$ принимает одно и тоже значение при фиксированном значении переменной $x \in \Omega_x$ для каждой точки (связанного вектора) на прямой, проходящей через начало координат в R^n (исключая само начало координат, где $R(0)$ не определено. Таким образом, если ограничиться рассмотрением векторов z, соответствующих точкам не единичной сфере, то для $R(z)$ получим ту же самую совокупность значений [16]. Поэтому рассмотрим задачу нахождения максимума для $\langle z, W(x)z \rangle$, т.е. $\lambda_1^W(x)$, при фиксированных значениях x при условии, что $\langle z,z \rangle = 1$. Эта величина при любом фиксированном значении $x \in \Omega_x$ определяется из условия

$$\max_{z \in O} R(z) = \max_{z = O} \langle z, W(x)z \rangle, \text{ или } \frac{\partial}{\partial z_i} R(z) = 0,\ i = 1,...,n.$$

При фиксированных значениях вектора $x \in \Omega_x$ стационарное (экстремальное) свойство отношения Релея принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z_i}R(z)=\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\mathrm{z}^T W(x)z}{z^T\mathrm{z}}\right]=\frac{\left(z^T z\right)\left(2W_i(x)z\right)-\left(z^T W(x)z\right)2z_i}{\left(z^T z\right)^2}=0,\ i=1,...,n.$$

Здесь $W_{i*}(x)$ − i-строка матрицы $W(x)$.

Учитывая что $\left(z^T z\right)^2\neq 0$, получаем условие нахождения корня $\lambda_1^W(x)$

(31) $$\left(z^T z\right)\left(W_{i*}(x)z\right)-\left(z^T W(x)z\right)z_i=0,\ i=1,...,n.$$

Таким образом, из условия (31) определяется $\lambda_1^W(x)$.

Для нахождения $\mathrm{Re}\left[\lambda_1^W(x^*)\right]\geq \mathrm{Re}\left[\lambda_1^W(x)\right],\ \ x,x^*\in\Omega_x$ используем условие

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1^W(x)\right]^2=0,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\lambda_1^W(x)\right]^2_{x=x^*}<0.$$

Таким образом, находятся «наименее благоприятные» значения параметров матрицы $A(\mathrm{x}^*)=A^*$.

Для поиска «наименее благоприятных значений матриц $g_1(x)$ и $g_2(x)$» учтем доказанное Предположение 5. А именно, матрица $\Pi(x)=\left[g_2(x)R^{-1}g_2^T(x)-g_1(x)P^{-1}g_1^T(x)\right]$ должна быть, по крайней мере, положительно полуопределенная для $x(t)\in\Omega_x$. Введем в рассмотрение нормальные действительные матрицы $G_1(x)=g_1(x)g_1^T(x)$ и $G_2(x)=g_2(x)g_2^T(x)$.

Определение 2. Под «наименее благоприятными» значениями матриц $g_1(x)$ и $g_2(x)$ понимаем матрицы g_1^* и g_2^* с постоянными элементами, для которых выполняются следующие соотношения $\max\limits_x \mathrm{tr}\left[g_1(x)g_1^T(x)\right]=\max\limits_x\sum\limits_{q=1}^n \nu_{qq}(x),\ x(t)\in\Omega_x$, где ν_{qq}− элемент главной диагонали симметрической матрицы $g_1(x)g_1^T(x)$ и

$\min\limits_x \mathrm{tr}\left[g_2(x)g_2^T(x)\right]=\min\limits_x\sum\limits_{p=1}^n \eta_{pp}(x),\ x(t)\in\Omega_x$, где η_{pp} − элемент главной диагонали симметрической матрицы $g_2(x)g_2^T(x)$.

Значения вектора x^*, при которых достигаются соответствующие максимальные и минимальные значения матриц $g_1(x)g_1^T(x)$ и $g_2(x)g_2^T(x)$ нетрудно отыскать, используя экстремальные свойства этих матриц:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{tr}\left[g_1(x)g_1^T(x)\right]=0,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{tr}\left[g_1(x)g_1^T(x)\right]<0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{tr}\left[g_2(x)g_2^T(x)\right]=0,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{tr}\left[g_2(x)g_2^T(x)\right]>0.$$

Отметим, что назначением матрицы R должно выполняться условие положительной, по крайней мере, полуопределенности матрицы $\Pi^*=\left[g_2^*R^{-1}\left(g_2^*\right)^T-g_1^*\left(P^*\right)^{-1}\left(g_1^*\right)^T\right]$.

Используя найденные «наименее благоприятные значения параметров $a^*=\left\{A^*,\ g_1^*,\ g_2^*\right\}\in D_a$», сформируем модель системы (3)

(32) $$\frac{d}{dt}\mathrm{x}^*(t)=A^*\mathrm{x}^*(t)+g_1^*w(t)+g_2^*u_M(t),\ x^*(t_0)=x_0$$

с управлениями вида (27)

$$w(t) = \left(P^*\right)^{-1} \left(g_1^*\right)^T S^* x^*(t),\ u(t) = -R^{-1} \left(g_2^*\right)^T S^* x^*(t), \tag{33}$$

где матрица S^* определяется решением алгебраического уравнения Риккати с постоянными параметрами

$$A^* S^* + S^* \left(A^*\right)^T - S^* \left[g_2^* R^{-1} \left(g_2^*\right)^T - g_1^* \left(P^*\right)^{-1} \left(g_1^*\right)^T \right] S^* + C^T Q C = 0.$$

Исходная система (1) с гарантирующими управлениями вида (33) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = f(\mathrm{x}) - \left[g_2(x) R^{-1} \left(g_2^*\right)^T - g_1(x) \left(P^*\right)^{-1} \left(g_1^*\right)^T \right] S^* x(t),\ x(t_0) = x_0. \tag{34}$$

Модель (33), содержащая «наименее благоприятные значения параметров», является мажорирующей по отношению системе (34), в смысле, что $\left\|\mathrm{x}^*(t)\right\| \geq \left\|\mathrm{x}(t)\right\|$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (13-08-00665а).

Список литературы

1. Kalman R.T. The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. In R. Bellman (ed.) Mathematical Optimization Techniques. Berkeley, Calif.: University of California Press. 1963.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
3. Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. Задачи управления с гарантированным результатом. Свердловск, 1986, 64 с.
4. Суботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
5. Понтрягин Л.С., Мишенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7, № 3. С. 436-445.
6. Афанасьев В.Н. Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенным объектом // Изв. РАН: ТиСУ. 2010. № 1. С. 16-23.
7. Afanasiev V.N. Guaranteed control of feedback linearizable nonlinear object // American Institute of Physics. Conference Proc. of the 9th International conference on mathematical problems in engineering, aerospace and science. 2012. Vol. 1493/1, P. 13-19.
8. Person J.D. Approximation methods in optimal control // J. of Electronics and Control. 1962. No. 12. P. 453-469.
9. Mrasek C.P. SDRE autopilot for dual controlled missiles // Proc. 17th IFAC Sympos. on Automatic Control in Aerospace. Toulouse, France, 2007.
10. Friedland B. Quasi Optimal Control and the SDRE method // Proc. 17th IFAC Sympos. on Automatic Control in Aerospace. Toulouse, France, 2007.
11. Salnci M.U., Gokbilen B.SDRE missile autopilot design using sliding mode control with sliding surfaces // Proc. 17th IFAC Sympos. on Automatic Control in Aerospace. Toulouse, France, 2007.
12. Çimen Tayfun. On the Existence of Solutions Characterized by Riccati Equations to Infinite-Time Horizon Nonlinear Optimal Control Problems // Proc. 18th World Conf. IFAC. Milano, Italy, August 28 - September 2, 2011. P. 9620-9626.
13. Ruderman M., Weigel D., HoffmannF., Bertram T. Extended SDRE control of 1-DOF robotic manipulator with nonlinearities // Proc. 18th World Conf. IFAC. Milano, Italy, August 28 - September 2, 2011. P. 10940-10945.
14. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 615 с.
15. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными объектами с параметрами, зависящими от состояния // Автоматика и телемеханика. 2011. №4. С. 43-56.
16. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
17. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука. 1978. 487 с.