V Кубок памяти А.Б.Воронецкого.

Высшая лига. **II тур. Бой за 1-4 места.** *27 ноября 2004 года.*

1. Положительные числа a, b, c, x, y, z удовлетворяют условию a+b+c=x+y+z=1. Доказать, что выполняется неравенство $\frac{ax^2}{b+c}+\frac{by^2}{c+a}+\frac{cz^2}{a+b}+\frac{1}{2}\geq 2(xy+yz+zx)$.
2. Какую наибольшую длину может иметь цепочка из последовательных натуральных чисел, каждое из которых представимо в виде суммы квадратов двух простых (не обязательно различных) чисел?
3. В некотором государстве 99 городов, некоторые пары городов соединены дорогами длиной в 1, 3 или 5 вёрст, причем от каждого города до каждого по этим дорогам можно добраться ровно одним способом. Из каждого города в каждый другой отправились гонцы с важным донесением. Доказать, что суммарное расстояние, пройденное гонцами, делится на 4.
4. Внутри квадрата ABCD со стороной 1 отмечены две точки P и Q. Какое минимальное значение может принимать сумма $BP+PQ+QD+\sqrt{2}(PA+QC)$?
5. В правильном *2n*–угольнике проведены главные диагонали. За ход (если возможно) отмечается вершина так, чтобы никакие две отмеченные вершины не были соединены отрезком. Мог ли процесс окончиться после 2004 ходов?
6. Прямая, параллельная диагонали BD и проходящая через точку пересечения диагоналей AC и BE правильного пятиугольника ABCDE, пересекает сторону AB в точке X. Найдите ∠BCX.
7. Найдите все функции $f: Z\to Z$ такие, что для любых целых m и n выполняется равенство f(m+f(f(n)))=f(m)+n.
8. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. Докажите, что общие стороны этих клеток (всего N сторон) можно пронумеровать различными натуральными числами от 1 до N так, что у любой отмеченной клетки набор чисел на её сторонах будет состоять из взаимно простых в совокупности чисел (если чисел будет не менее двух).

V Кубок памяти А.Б.Воронецкого.

Высшая лига. **II тур. Бой за 5-8 места.** *27 ноября 2004 года.*

1. Положительные числа a, b, c, x, y, z удовлетворяют условию a+b+c=x+y+z=1. Доказать, что выполняется неравенство $\frac{ax^2}{b+c}+\frac{by^2}{c+a}+\frac{cz^2}{a+b}+\frac{1}{2}\geq 2(xy+yz+zx)$.
2. Какую наибольшую длину может иметь цепочка из последовательных натуральных чисел, каждое из которых представимо в виде суммы квадратов двух простых (не обязательно различных) чисел?
3. В некотором государстве 99 городов, некоторые пары городов соединены дорогами длиной в 1, 3 или 5 вёрст, причем от каждого города до каждого по этим дорогам можно добраться ровно одним способом. Из каждого города в каждый другой отправились гонцы с важным донесением. Доказать, что суммарное расстояние, пройденное гонцами, делится на 4.
4. M и N - середины сторон AD и BC (соответственно) квадрата. На отрезке MN выбрана точка K так, что ∠KDM=15°. Прямая BK пересекает прямую CD в точке P. Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины отрезков KD и AP, равна половине стороны квадрата.
5. В правильном *2n*–угольнике проведены главные диагонали. За ход (если возможно) отмечается вершина так, чтобы никакие две отмеченные вершины не были соединены отрезком. Мог ли процесс окончиться после 2004 ходов?
6. Прямая, параллельная диагонали BD и проходящая через точку пересечения диагоналей AC и BE правильного пятиугольника ABCDE, пересекает сторону AB в точке X. Найдите ∠BCX.
7. Найдите все простые числа p, для которых (p+1)/2 и $(p^2+1)/2$ – точные квадраты.
8. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. Докажите, что общие стороны этих клеток (всего N сторон) можно пронумеровать различными натуральными числами от 1 до N так, что у любой отмеченной клетки набор чисел на её сторонах будет состоять из взаимно простых в совокупности чисел (если чисел будет не менее двух).

V Кубок памяти А.Б.Воронецкого.

***Первая лига.* <u>II тур.</u> Бой за 1-4 места.** *27 ноября 2004 года.*

1. Положительные числа a, b, x, y, удовлетворяют условию a+b=x+y=1. Доказать, что выполняется неравенство $\frac{ax^2}{b}+\frac{by^2}{a}+\frac{1}{2}\geq 2xy$.
2. Какую наибольшую длину может иметь цепочка из последовательных натуральных чисел, каждое из которых представимо в виде суммы квадратов двух простых (не обязательно различных) чисел?
3. В некотором государстве 99 городов, некоторые пары городов соединены дорогами длиной в 1, 3 или 5 вёрст, причем от каждого города до каждого по этим дорогам можно добраться ровно одним способом. Из каждого города в каждый другой отправились гонцы с важным донесением. Доказать, что суммарное расстояние, пройденное гонцами, делится на 4.
4. M и N - середины сторон AD и BC (соответственно) квадрата. На отрезке MN выбрана точка K так, что $\angle$KDM=15°. Прямая BK пересекает прямую CD в точке P. Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины отрезков KD и AP, равна половине стороны квадрата.
5. В правильном *2n*–угольнике проведены главные диагонали. За ход (если возможно) отмечается вершина так, чтобы никакие две отмеченные вершины не были соединены отрезком. Мог ли процесс окончиться после 2004 ходов?
6. Прямая, параллельная диагонали BD и проходящая через точку пересечения диагоналей AC и BE правильного пятиугольника ABCDE, пересекает сторону AB в точке X. Найдите $\angle$BCX.
7. Найдите все простые числа p, для которых (p+1)/2 и $(p^2+1)/2$ – точные квадраты.
8. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. Докажите, что стороны этих клеток (всего N сторон) можно пронумеровать различными натуральными числами от 1 до N так, что у любой отмеченной клетки набор чисел на её сторонах будет состоять из взаимно простых в совокупности чисел (если чисел будет не менее двух).

V Кубок памяти А.Б.Воронецкого.

***Первая лига.* <u>II тур.</u> Бой за 5-8 места.** *27 ноября 2004 года.*

1. Положительные числа a, b, x, y, удовлетворяют условию a+b=x+y=1. Доказать, что выполняется неравенство $\frac{ax^2}{b}+\frac{by^2}{a}+\frac{1}{2}\geq 2xy$.
2. Четырёхзначное число $\overline{abcd}$ делится на 99. Известно, что $a^2+c^2=b^2+d^2$. Доказать, что ac=bd.
3. В пространстве расположены два единичных куба с общим центром. Доказать, что объем их пересечения не меньше ½.
4. На продолжении стороны CD квадрата ABCD за точку D взята такая точка P, что $\angle$CBP=60°. K – середина отрезка BP. Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины отрезков KD и AP, равна половине стороны квадрата.
5. В правильном *2n*–угольнике проведены главные диагонали. За ход (если возможно) отмечается вершина так, чтобы никакие две отмеченные вершины не были соединены отрезком. Мог ли процесс окончиться после 2004 ходов?
6. Прямая, параллельная диагонали BD и проходящая через точку пересечения диагоналей AC и BE правильного пятиугольника ABCDE, пересекает сторону AB в точке X. Найдите $\angle$BCX.
7. Найдите все простые числа p, для которых (p+1)/2 и $(p^2+1)/2$ – точные квадраты.
8. На клетчатой плоскости отмечено несколько клеток. Докажите, что стороны этих клеток (всего N сторон) можно пронумеровать различными натуральными числами от 1 до N так, что у любой отмеченной клетки набор чисел на её сторонах будет состоять из взаимно простых в совокупности чисел (если чисел будет не менее двух).