VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

***Высшая лига.* <u>I тур.</u>** *25 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. При каких n произведение n двузначных чисел, в каждом из которых различные цифры, может равняться произведению их чисел-перевёртышей, т.е. записанных в обратном порядке?
2. Для скольких натуральных чисел n, не превосходящих 2005, выполняется неравенство $\{n\sqrt{2}\}+\{\sqrt{2}\}>1$, где $\{x\}$ –дробная часть числа x?
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1, так что прямая, проходящая через центры вписанных в треугольники AA_1C и AC_1C окружностей, отсекает от этих сторон равные отрезки (считая от вершины B). Доказать, что углы BA_1A и BC_1C равны.
4. Новая шахматная фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 1, 2, … клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти всю доску 100×100, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. Внутри каждой стороны правильного шестиугольника отметили по одной точке, а затем стороны стёрли. Восстановите по полученным 6 точкам исходный правильный шестиугольник.
6. Даны пять различных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Доказать, что для некоторых i и j выполняется неравенство $0<\dfrac{a_i-a_j}{a_ia_j+1}<1$.
7. Из цифр 1, 2, …, 9 составляются три трёхзначных числа, два из которых в сумме дают третье. Доказать, что количество таких троек чисел делится на 8.
8. В каждом из трёх 11-х классов в школе учится 24 человека. Известно, что каждый одиннадцатиклассник дружит хотя бы с n школьниками из двух других классов. При каком наименьшем n можно утверждать, что гарантированно найдутся три дружащих между собой одиннадцатиклассника из разных классов?

VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

***Высшая лига.* <u>I тур.</u>** *25 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. При каких n произведение n двузначных чисел, в каждом из которых различные цифры, может равняться произведению их чисел-перевёртышей, т.е. записанных в обратном порядке?
2. Для скольких натуральных чисел n, не превосходящих 2005, выполняется неравенство $\{n\sqrt{2}\}+\{\sqrt{2}\}>1$, где $\{x\}$ –дробная часть числа x?
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1, так что прямая, проходящая через центры вписанных в треугольники AA_1C и AC_1C окружностей отсекает от этих сторон равные отрезки (считая от вершины B). Доказать, что углы BA_1A и BC_1C равны.
4. Новая шахматная фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 1, 2, … клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти всю доску 100×100, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. Внутри каждой стороны правильного шестиугольника отметили по одной точке, а затем стороны стёрли. Восстановите по полученным 6 точкам исходный правильный шестиугольник.
6. Даны пять различных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Доказать, что для некоторых i и j выполняется неравенство $0<\dfrac{a_i-a_j}{a_ia_j+1}<1$.
7. Из цифр 1, 2, …, 9 составляются три трёхзначных числа, два из которых в сумме дают третье. Доказать, что количество таких троек чисел делится на 8.
8. В каждом из трёх 11-х классов в школе учится 24 человека. Известно, что каждый одиннадцатиклассник дружит хотя бы с n школьниками из двух других классов. При каком наименьшем n можно утверждать, что гарантированно найдутся три дружащих между собой одиннадцатиклассника из разных классов?

VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

Первая лига. **<u>I тур.</u>** *25 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. Может ли произведение 3 двузначных чисел, в каждом из которых различные цифры, равняться произведению их чисел-перевёртышей, т.е. записанных в обратном порядке?
2. Решите уравнение $[x]+[2x]+[4x]+[8x]=2005$, где $[a]$ – целая часть числа a.
3. В выпуклом четырёхугольнике средние линии равны. Доказать, что средняя линия не превышает наименьшей из полусумм противоположных сторон.
4. Новая шахматная фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 1, 2, … клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти всю доску 2005×2005, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. Внутри каждой стороны квадрата отметили по одной точке, а затем стороны стёрли. Восстановите по полученным 4 точкам исходный квадрат.
6. Даны пять различных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Доказать, что для некоторых i и j выполняется неравенство $0<\frac{a_i-a_j}{a_ia_j+1}<1$.
7. Из цифр 1, 2, …, 9 составляются три трёхзначных числа, два из которых в сумме дают третье. Доказать, что количество таких троек чисел делится на 8.
8. В каждом из трёх 11-х классов в школе учится 24 человека. Известно, что каждый одиннадцатиклассник живёт в одном доме хотя бы с n школьниками из двух других классов. При каком наименьшем n можно утверждать, что гарантированно найдутся три живущих в одном доме одиннадцатиклассника из разных классов?

VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

Первая лига. **<u>I тур.</u>** *25 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. Может ли произведение 3 двузначных чисел, в каждом из которых различные цифры, равняться произведению их чисел-перевёртышей, т.е. записанных в обратном порядке?
2. Решите уравнение $[x]+[2x]+[4x]+[8x]=2005$, где $[a]$ – целая часть числа a.
3. В выпуклом четырёхугольнике средние линии равны. Доказать, что средняя линия не превышает наименьшей из полусумм противоположных сторон.
4. Новая шахматная фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 1, 2, … клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти всю доску 2005×2005, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. Внутри каждой стороны квадрата отметили по одной точке, а затем стороны стёрли. Восстановите по полученным 4 точкам исходный квадрат.
6. Даны пять различных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Доказать, что для некоторых i и j выполняется неравенство $0<\frac{a_i-a_j}{a_ia_j+1}<1$.
7. Из цифр 1, 2, …, 9 составляются три трёхзначных числа, два из которых в сумме дают третье. Доказать, что количество таких троек чисел делится на 8.
8. В каждом из трёх 11-х классов в школе учится 24 человека. Известно, что каждый одиннадцатиклассник живёт в одном доме хотя бы с n школьниками из двух других классов. При каком наименьшем n можно утверждать, что гарантированно найдутся три живущих в одном доме одиннадцатиклассника из разных классов?