XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
X Южный математический турнир.
Старт-лига. 4 тур. 1 октября 2015 года.
Высшая лига. ***Полуфиналы.*** ***Решения***.

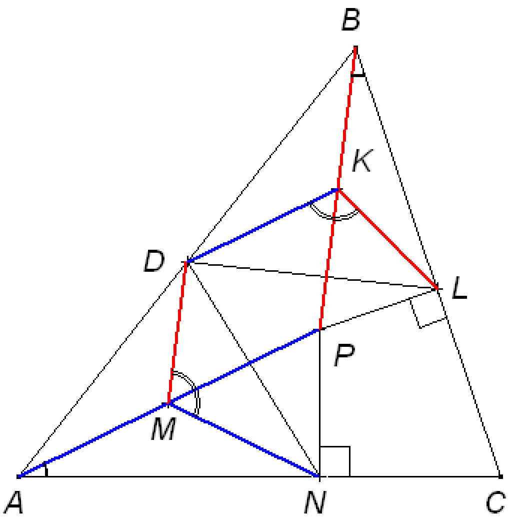
1. Есть 13 внешне одинаковых монет. Суд знает, что их веса 1г, 2г, …, 13 г. Эксперт знает точный вес каждой монеты. У него есть весы с двумя чашками, которые показывают равновесие (загорается лампочка) или неравновесие, но не показывают, какая чаша тяжелее. Можно ли провести 3 взвешивания на таких весах так, чтобы суду стал ясен вес каждой из монет? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: Можно. ***Доказательство:*** Каждый раз эксперт устраивает равновесие. В первый раз 8 монет уравновешиваются тремя. 36=1+2+…+8≤8 монет=3 монеты≤11+12+13=36, поэтому знаем 3 группы: A={1,2,3,4,5,6,7,8}, B={9,10} и C={11,12,13}. Соответственно, монеты из этих групп будем обозначать малыми буквами с индексами.

Второе взвешивание $15=1+2+3+9\le a_1+a_2+a_3+b_1=a_4+a_5\le 7+8=15$. Получим группы D={1,2,3}, E={4,5,6}, F={7,8}, C={11,12,13}, а монеты 9 и 10 уже определились.

Третье взвешивание: $32=1+4+7+9+11\le d_1+e_1+f_1+9+c_1=d_2+e_2+10+c_2\le 3+6+10+13=32$, что позволяет определить все монеты.

2. Внутри остроугольного треугольника *ABC* взята точка *P* так, что ∠*PAC*=∠*PBC*. Пусть *L* и *N* – основания перпендикуляров, опущенных из точки *P* на стороны *BC* и *AC*, соответственно, *D* – середина *AB*. Докажите, что *DL*=*DN*.



Доказательство: Пусть *M* и *K* – середины отрезков *AP* и *BP* соответственно. Тогда *DM* – средняя линия в треугольнике *ABP*, *DM*=*BP*/2=*KL*, т.к. медиана из вершины прямоугольного треугольника (*BPL*) равна половине гипотенузы. Аналогично *DK*=*MN*. Кроме того, средние линии в треугольнике *ABP* дают нам два равных треугольника *AMD* и *DKB*. В результате получим, что ∠*DMN*=∠*DMP*+∠*PM*N=(∠*DAM*+∠*ADM*)+2∠*MAN* (внешний угол (для треугольников *ADM* и *AMN*) равен сумме двух внутренних несмежных с ним углов), аналогично ∠*DKL*=∠*DKP*+∠*PKL*=(∠*KDB*+*DBK*)+2∠*KBL*. Но в силу равенства соответствующих углов треугольников *AMD* и *DKB*, а также равенства ∠*MAN*=∠*PAC*=∠*PBC*=∠*KBL*, получаем, что ∠*DMN*=∠*DKL*. Значит, треугольники *DMN* и *DKL* равны по двум сторонам (*DM*=*KL, MN*=*DK*) и углу между ними (∠*DMN*=∠*DKL*), тогда *DL*=*DN*, что и требовалось доказать.

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть восемь чисел с суммой 404. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: Выигрывает Вася. ***Решение:*** Он мысленно разбивает все числа на пары с суммой 101. После хода Пети остается всегда не менее 12 чисел. В ответ на ход Пети Вася вычёркивает все числа из начатых Петей пар и столько же целых пар, сколько вычеркнул Петя. После шестого хода Васи останется всего 4 числа.

4. Решите в натуральных числах уравнение: $x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2 = 2015$.

Ответ: нет решений в натуральных числах. ***Доказательство:*** Квадрат целого числа при делении на 3 имеет остатки 0 или 1. Разберём варианты остатков с точностью до симметрии (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1) и (1, 1, 1), получим, что правая часть уравнения имеет остатки 0, 1, 1 и 0 соответственно, но число 2015 имеет остаток 2 при делении на 3. Значит, равенство невозможно.

5. В ряд лежат куски сыра. Если веса соседей не равны, то отношение большего к меньшему не превосходит 4. Разрешено все или некоторые куски разрезать на 2 части. Докажите, что

можно разрезать и выложить все куски в ряд так, чтобы в каждой паре отношение большего к меньшему не превосходило 2. (*А.В.Шаповалов*)

Решение: Выложим куски в ряд слева направо по возрастанию веса. Предположим, что где-то кусок K больше учетверенного левого соседа. Объявим кусок K и его соседей справа большими, а куски слева от K – малыми. Каждый большой кусок больше любого учетверенного малого. Но в исходной цепочке где-то лежали рядом большой и малый куски – противоречие. Значит, и в новом ряду в каждой паре соседей вес правого куска не больше учетверенного веса левого куска.

Разрежем каждый кусок в отношении 1:2 и положим части на место старого куска: меньший слева, больший – справа. Из кусков $3a\le 3b$ получит после разрезания такой фрагмент ряда: a $2a$ b $2b$. Поскольку $b/a=3b/3a\le 4$, то $b/2a\le 2$. С другой стороны, $2a/b\le 2$ так как $a\le b$.

6. От однокругового футбольного турнира осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Взглянув на неё, математик определил, что в турнире не было ничьих. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: 3. ***Пример*:** Пусть Петя видит, что забито-пропущено у А 2:0, у Б 1:1, у В 0:2. Тогда Б забила гол В и пропустила от А. Оставшийся гол А забила В. Таким образом, все три матча закончились 1:0, ничьих действительно не было. ***Доказательство оценки*:** Пусть в турнире участвовало больше трёх команд и нет ничьих. Тогда найдутся четыре команды так, что А победила Б (пусть с разницей в m мячей), а В победила Г (пусть с разницей в n мячей, где $n\ge m$). Уменьшим командам А и В количество забитых мячей в этих матчах на m, но зато увеличим им на m количество забитых мячей в матчах А-Г и В-Б. Тогда общее количество забитых и пропущенных у этих четырёх команд не изменится, в то же время матч А-Б закончится вничью.

7. На плоскости отмечены 74 точки. Если выкинуть любую точку, то остальные можно зачеркнуть восемью прямыми. Докажите, что все точки можно зачеркнуть восемью прямыми. (*С.Г.Волченков, А.В.Шаповалов*)

Решение: Выкинем любую точку и зачеркнем оставшиеся 73 точки восемью прямыми. На некоторой прямой l окажется не менее 10 точек. Начнем сначала, и выкинем любую точку с l, и зачеркнем оставшиеся 73 точки восемью прямыми. Если среди этих прямых нет l, то каждая зачеркивает на l не более одной точки, а у нас там оставалось 9 точек. Значит, среди этих восьми прямых есть и l, которая, в том числе, зачеркнула и выкинутую точку.

8. Сумма положительных чисел *a, b, c* равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3\ge 2\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right).$$

***Доказательство*:** Перенесём все слагаемые правой части налево, заменим каждую разность в числителе корня на сумму двух других переменных (например, $1–a=b+c$), дроби в левой части с общим знаменателем превратим в одну дробь с таким знаменателем, число 3 разобьём на три 1. Сгруппируем получившиеся слагаемые в три группы: $\left(\frac{b+c}{a}-2\sqrt{\frac{b+c}{a}}+1\right)+\left(\frac{c+a}{b}-2\sqrt{\frac{c+a}{b}}+1\right)+\left(\frac{a+b}{c}-2\sqrt{\frac{a+b}{c}}+1\right)$. Тогда левая часть нового равносильного неравенства превратится в сумму трёх квадратов, которая будет неотрицательной, что даёт нам доказательство исходного неравенства:

$$\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}-1\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c+a}{b}}-1\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}-1\right)^2\ge 0.$$