X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
IX Южный математический турнир.
Старт-лига. Командная олимпиада. 20 сентября 2014 года.
Решения.

1. Даны два треугольника. Для каждой пары углов первого треугольника вычислили их разность. Эти три разности оказались равными трём разным углам второго треугольника. Докажите, что второй треугольник – прямоугольный. (*А.В.Шаповалов*)

Решение: Упорядочим углы первого треугольника $\alpha>\beta>\gamma$, среди которых нет равных, т.к. каждая из трёх их попарных разностей равна углу второго треугольника, значит, не равна 0. Сложим три эти разности $(\alpha-\beta)+(\alpha-\gamma)+(\beta-\gamma)$, которые в сумме дадут 180° – сумму углов второго треугольника. Тогда $2(\alpha-\gamma)=180$, а $\alpha-\gamma=90$, что равно величине одного из углов второго треугольника. Значит, второй треугольник – прямоугольный.

2. По краю круглого циферблата, начиная с отметки «12», поползли мураш и два жучка, причём жучки – по часовой стрелке, а мураш – против часовой. Они ползут с постоянными скоростями без остановок. С первым жучком мураш встретился на отметке «4», со вторым – на отметке «2». На каких отметках часов насекомые могут встречаться втроем одновременно?

Ответ: На отметках 8, 4 и 12. ***Решение:*** Из условия следует, что отношения скоростей мураша и жучков равны 10:5:2. Тогда мураш и первый жучок будут встречаться на отметках 4, 8 и 12, мураш и второй жучок – 2, 4, 6, 8, 10, 12, а жучки – 8, 4, 12. При этом в каждый момент появления второго жучка на отметках с чётными номерами там всегда будет находиться мураш. Значит, втроем они будут встречаться на отметках 8, 4 и 12.

3. На плоскости отмечены несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая из этих точек окрашена в один из трёх цветов, причём есть точка каждого цвета. Докажите, что найдется треугольник с вершинами трёх разных цветов, внутри которого нет отмеченных точек.

Решение: Рассмотрим все треугольники с вершинами трёх различных цветов. Их конечное количество, равное произведению количеств точек каждого цвета. Возьмём среди этих треугольников наименьший по площади, тогда внутри него нет больше отмеченных точек, иначе взяв такую точку и две вершины треугольника других двух цветов, мы бы получили треугольник ещё меньшей площади.

4. Тридцать школьников занумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них сказал: "Каждый, чей номер взаимно прост с моим, иногда лжёт". Какое наибольшее количество школьников, всегда говорящих правду, может быть среди этих тридцати? (*А.С.Голованов*)

Ответ: 15, например, когда всегда правдивые школьники будут с чётными номерами, а остальные школьники иногда лгут. ***Доказательство оценки*:** Разобьём школьников на пары с соседними номерами. Числа в паре взаимно просты, поэтому если один из пары всегда правдив, то второй – не таков.

5. Докажите, что для любого натурального *n* найдется не менее *n* различных прямоугольных треугольников со стороной 2^{n+1} и двумя другими целыми сторонами. (*Д.Ю.Кузнецов*)

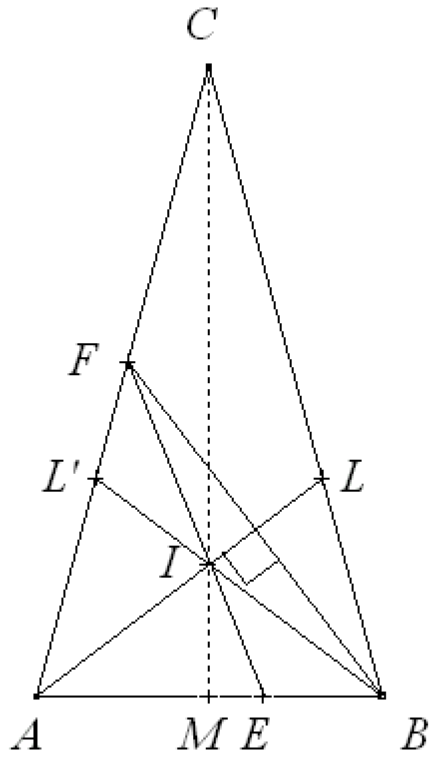
Решение: Докажем, что сторона 2^{n+1} будет катетом по крайней мере у n различных треугольников. Пусть другой катет равен a, гипотенуза – c. Тогда по теореме Пифагора $a^2+(2^{n+1})^2=c^2$. Перенесём a^2 к c^2, тогда разность квадратов $c^2-a^2=(c-a)(c+a)=2^{2n+2}$, где оба множителя $(c-a)$ и $(c+a)$ являются различными натуральными числами одной чётности, являющимися степенями двойки, дающими в произведении 2^{2n+2}. Меньший множитель $(c-a)$ может принимать ровно n значений $(2, 2^2, \ldots, 2^n)$, для каждого из которых однозначно находится больший множитель $(c+a)$. Для каждого из этих n случаев будет своё решение $a=2^{2n-k}-2^k$, $c=2^{2n-k}+2^k$, где k – целое неотрицательное число в пределах от 0 до $(n-1)$. Таким образом, уже получим n различных прямоугольных треугольников, удовлетворяющих условию.

6. Клетчатый квадрат 20×20 надо разрезать на две равные части по ломаной, составленной из диагоналей 20 клеток. Сколькими способами можно это сделать? (способы, отличающиеся поворотом и отражением, считаются различными) (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: $2046=2^{11}-2$. ***Решение*:** Пусть сторона клетки равна 1. Тогда длины сторон частей, совпадающих с контуром квадрата – целые, а остальные длины сторон кратны $\sqrt{2}$, и поэтому иррациональны. При наложении частей куски периметра должны совпасть, поэтому периметр поделен ломаной пополам, и точки деления – центрально симметричны. Середины соединяющего их отрезка тоже при наложении совпадут. Но это – центр квадрата, значит, он принадлежит обеим частям, и разрез проходит через него.

Итак, разрез центрально симметричен. Достаточно рассмотреть его половинку, идущую к левой либо верхней стороне. Идя от центра, мы сделаем 10 шагов, и на каждом выбираем одно из двух направлений (скажем, вправо вверх или влево вверх при движении к верхней стороне). Вторая часть пути достраивается симметрично. Поэтому есть 2^{10} путей к верхней стороне и еще 2^{10} – к левой. Среди этих 2^{11} путей дважды учтены два пути: по диагоналям.

7. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AB* проведена биссектриса *AL*. На отрезке *AB* отмечена такая точка *E*, что *AE* = *BL*. Из вершины *B* треугольника *ABL* проведена высота; её продолжение пересекает *AC* в точке *F*. Докажите, что точка пересечения *AL* и *EF* лежит на высоте треугольника *ABC*.



Решение: При построении чертежа воспользуемся методом «идеального» построения, пользуясь тем, что высота *CM* равнобедренного треугольника *ABC* является также биссектрисой, а биссектрисы углов – их оси симметрии. Построим точку *L'*, симметричную *L* относительно *CM*, а затем *E* и *F*, симметричные соответственно *L'* и *B* относительно *AL*, что следует из условия задачи. Тогда симметричные отрезки *AL* и *BL'* пересекутся в некоторой точке *I* на своей оси симметрии *CM*, а симметричные отрезки *BL'* и *FE* пересекутся на своей оси симметрии *AL* в той же точке *I* пересечения отрезков *AL* и *BL'*. Значит, в точке *I* пересекутся все четыре отрезка *AL*, *BL'*, *FE* и *CM*. Отсюда получаем, что точка пересечения *AL* и *EF* лежит на высоте *CM* треугольника *ABC* и является точкой *I* пересечения биссектрис *CM* и *AL*, т.е. центром вписанной окружности треугольника *ABC*.

8. На всех клетках шахматной доски лежит по алмазу. Известно, что в каждой паре клеток с общей стороной веса обоих алмазов различны. Докажите, что алмазы можно выложить на доску так, чтобы в каждой паре клеток, связанных ходом коня, веса обоих алмазов были различны. (*А.В.Шаповалов*)

Решение: Разобьём доску на 32 доминошки 1×2. В каждой из них алмазы разного веса, поэтому алмазов каждого веса не более 32. Сложим алмазы одинакового веса в отдельные кучки. В каждой будет не более 32 алмазов. Если куч две, в каждой ровно по 32 алмаза – разложим одну кучку на белые клетки шахматной доски, другую – на чёрные. Если куч более трёх, будем сливать две самые маленькие в одну (в них вместе не более 32), пока не останется 3 кучки. Заметим, что в самой маленькой кучке менее 64/3 алмазов, то есть, не более 21. Разложим теперь самую большую кучку на белые клетки, начиная заполнять горизонтали сверху. Алмазы первой кучки друг друга «конём не бьют». Вторую по величине кучку разложим на чёрные поля, начиная заполнять горизонтали снизу. И алмазы второй кучки друг друга «не бьют». Третью кучку разложим на остальные поля. Допустим, алмазы третьей кучки оказались на клетках, связанных ходом коня. Тогда один из них – на белой клетке, другой – на чёрной, и соответствующие горизонтали – соседние или через одну. Тогда, не считая этих двух горизонталей и, быть может, горизонтали между ними, на всех остальных горизонталях есть по 4 алмаза из третьей кучки. Получаем не менее 5 горизонталей с 4 алмазами и ещё 2 горизонтали с одним алмазом на каждой. Всего алмазов не менее 22, что больше 21. Противоречие.