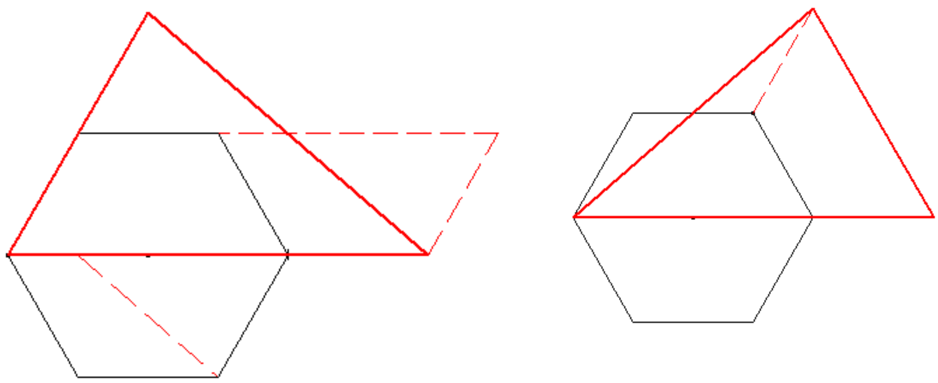
Командная олимпиада Старт-лиги
***VIII Южного математического турнира.* 17 сентября 2013 года**

1. Можно ли выписать в ряд 10 натуральных чисел, чтобы среднее арифметическое любых двух или более подряд идущих чисел не было целым числом?
Ответ: Можно. ***Решение:*** Запишем числа в следующем порядке 1, 2, 1, 2, …. Тогда в любом наборе из n подряд идущих чисел будут и единицы, и двойки, значит, сумма набора будет больше n, но меньше $2n$. Следовательно, среднее арифметическое чисел такого набора будет больше 1, но меньше 2, т.е. окажется нецелым числом.

2. На складе имеется много мешков с песком общей массой более 1001 кг. Каждый мешок весит не более 1 кг. Докажите, что в грузовик, который может увезти 1000 кг и в тележку, в которую помещается 1 кг, можно отгрузить для вывоза не менее 1000 кг песка.
Доказательство: начнём класть мешки на грузовик пока это возможно, т.е. суммарная масса песка будет не превышать 1000 кг, а с добавлением любого нового мешка будет превышать 1000 кг. Тогда любой из мешков положим в тележку, что можно сделать, т.к. его масса не более 1 кг. В результате на грузовике и тележке окажется в сумме не меньше 1000 кг, что и требовалось.

3. Разрежьте правильный шестиугольник на три части, из которых можно сложить треугольник.
Решение: два возможных разрезания представлены на чертежах справа.



4. Числа x и y различны и не равны 1. Докажите, что, если

$$yz-\frac{x^2}{1-x}=zx-\frac{y^2}{1-y}\text{, то } yz-\frac{x^2}{1-x}=zx-\frac{y^2}{1-y}=x+y+z.$$

Доказательство 1: Перенесём в исходном равенстве в левую часть члены с z, а в правую – все остальные, после чего выразим $z=\frac{(x-1)(y-1)-1}{(x-1)(y-1)}$. Затем подставим это выражение вместо z в равенство $yz-\frac{x^2}{1-x}=x+y+z$ и убедимся в его верности.

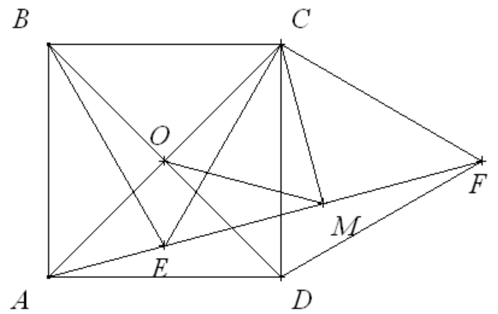
Доказательство 2: **(с применением свойства ряда равных отношений – см. п.2.1, §2, часть 1 из книги Я.П.Понарина «Элементарная геометрия. т.1»).**

$$yz-\frac{x^2}{1-x}=zx-\frac{y^2}{1-y}=\frac{yz-yzx-x^2}{1-x}=\frac{zx-zxy-y^2}{1-y}=\frac{(yz-yzx-x^2)-(zx-zxy-y^2)}{(1-x)-(1-y)}=$$

$$=\frac{(yz-yzx-x^2)-(zx-zxy-y^2)}{(1-x)-(1-y)}=\frac{z(y-x)+(y-x)(y+x)}{y-x}=x+y+z,$$ что и требовалось доказать. *Комментарий: задачу на олимпиаде решили две команды, которые обе воспользовались свойством ряда равных отношений, о котором на смене была прочи-*

тана лекция одним из преподавателей. Т.о., уже на первом соревновании школьники воспользовались материалами прочитанных им лекций.

5. На сторонах квадрата *ABCD* построены равносторонние треугольники *BCE* (внутрь квадрата) и *CDF* (наружу). Точки *O* и *M* – середины отрезков *AC* и *EF* соответственно. Докажите, что треугольник *OCM* – равносторонний.



<u>Доказательство</u>: При повороте на 60° относительно точки *C* вершины квадрата *B* и *D* перейдут соответственно в точки *E* и *F*, а середина диагонали *BD*, которая является и серединой диагонали *AC*, т.е. центром квадрата *O*, перейдёт в середину отрезка *EF*, т.е. в точку *M*. Т.к. при повороте на 60° относительно *C* точка *O* перейдёт в точку *M*, то треугольник *OCM* – равносторонний. <u>Примечание</u>: *приведённое выше решение показывает красоту применения движений при решении задач. Также эту задачу можно решить через нахождение равных треугольников, отрезков и подсчёт углов.*

6. Из целых чисел от 1 до 20 выбрали 7 различных. Докажите, что из выбранных чисел можно составить две группы с одинаковой суммой. В группы могут входить не все выбранные числа.

<u>Доказательство</u>: Сумма любого набора выбранных чисел будет натуральным число от 1 до 14+15+16+17+18+19+20=119. Рассмотрим количество всевозможных подмножеств нашего выбранного множества из 7 чисел. Таких подмножеств 2^7–1=127, т.к. каждое выбранное число либо входит, либо не входит в подмножество (2 способа выбора каждого числа), а также надо исключить подсчитанное нами пустое подмножество. Т.к. количество подмножеств (127) больше количества возможных значений сумм (119), то по принципу Дирихле найдутся два различных подмножества с одинаковыми суммами. Уберём теперь из этих двух подмножеств общие элементы, тогда останутся два подмножества с различным набором элементов, но с одинаковой суммой, что и требовалось получить.

7. Решите уравнение в целых числах $36a^4+b^4=9c^4+4d^4$.

<u>Ответ</u>: все числа равны 0. ***<u>Решение</u>:*** Рассмотрим остатки при делении на 5. Целое число в четвёртой степени при делении на 5 даёт остатки 0 или 1, значит, левая часть уравнения даёт остатки 0, 1 или 2, а правая 0, 3 или 4. Следовательно, равенство возможно только в случае, когда все числа кратны 5. Тогда заменим их на числа вида $5a_1$, $5b_1$, $5c_1$ и $5d_1$, где a_1, b_1, c_1 и d_1 – целые числа. После сокращения на 5^4=625 снова получим равенство прежнего вида, тогда, аналогично рассуждая, получим, что числа a_1, b_1, c_1 и d_1 также кратны 5, значит, их можно также заменить. Продолжая рассуждать аналогичным образом, получим, что числа a, b, c и d делятся на бесконечно большие степени 5, что возможно, только в случае, когда все числа равны 0. <u>Примечание</u>: *применённую в решении идею бесконечного спуска можно сразу обойти, воспользовавшись принципом крайнего, взяв среди всех возможных наборов решений набор с наименьшим по модулю числом.*

8. На доске написано число 2010. Каждый из двух игроков своим ходом прибавляет к написанному числу один из его простых делителей не больший 10. Выигрывает тот, кто напишет на доске число большее 1000000. Кто может выиграть, независимо от игры соперника?

<u>Ответ</u>: выигрывает первый игрок. ***<u>Решение</u> 1:*** С помощью «анализа с конца» для каждого целого числа от 2010 до 1000000 можно определить выигрышное оно, или проигрышное. Выигрышное число – это число, создание которого при правильной игре далее приводит к победе; проигрышное наоборот приводит к поражению. Тогда число 2016 будет либо выигрышным, либо проигрышным. Если оно выигрышное, то первый игрок из числа $2010=2\cdot3\cdot5\cdot67$ создаёт число $2010+2=2012=2^2\cdot503$, из которого второй сможет сделать только $2011+2=2014$, тогда первый сделает $2014+2=2016$, т.е. выиграет в дальнейшем при правильной игре. Если же 2016 – проигрышное, то первый создаёт первым своим ходом число $2010+3=2013=3\cdot11\cdot61$, из которого второй вынужден создать только число $2013+3=2016$, т.е. второй проиграет.

***Решение* 2:** **(рассказанное единственной командой Старт-лиги, решившей эту задачу, и несколькими командами старшей лиги).** Первым своим ходом первый игрок прибавляет 3, оставляя второму нечётное число, после чего на ход второго нечётным числом (а такой ход всегда будет хотя бы числом, которым сходил только что первый) первый отвечает, повторяя число второго, что он может сделать, т.к. делимость на простое число второго сохраняется. Так первый игрок поступает, пока не возникнет число в диапазоне от 999988 до 999995, который нельзя проскочить, т.к. прибавлять можно максимум 7. Далее «анализом с конца» с перебором чисел последнего десятка можно показать, что первый выиграет, пользуясь тем, что первый ходит с чётного числа интервала от 999988 до 999995, кратного маленькому нечётному простому числу (3, 5 или 7), которым только что сходил второй игрок. Такими числами будут только 999992, кратное 7, и 999990, кратное 5 и 3. В первом случае первый проведёт второго по пути $999994\to999996\to999998\to1000000\to1000002$ – победа первого; во втором случае первый проведёт второго по пути $999995\to1000000\to1000002$ – победа первого.