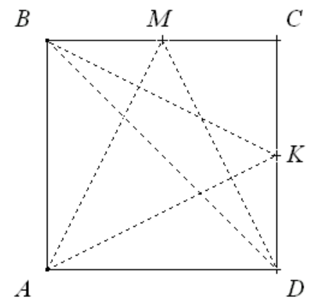
IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
VIII Южный математический турнир.
Старт-лига. 2 тур. 19 сентября 2013 года.
Решения.

1. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $xyz + 2x + 3y + 6z = xy + 2xz + 3yz$?
Ответ: 10. ***Решение:*** Уравнение равносильно следующему: $(x–3)(y–2)(z–1) = -6$. При этом надо учитывать, что в силу положительности исходных натуральных чисел будут выполняться неравенства $x–3\geq–2$, $y–2\geq–1$, $z–1\geq0$. Десять решений получившегося уравнения находим из трёх возможных подходящих под оценки разложений на три целочисленных множителя числа (–6): $(–2)\cdot1\cdot3$, $(–1)\cdot2\cdot3$, $(–1)\cdot1\cdot6$. В первом случае – 2 решения, во втором и третьем – по 4.

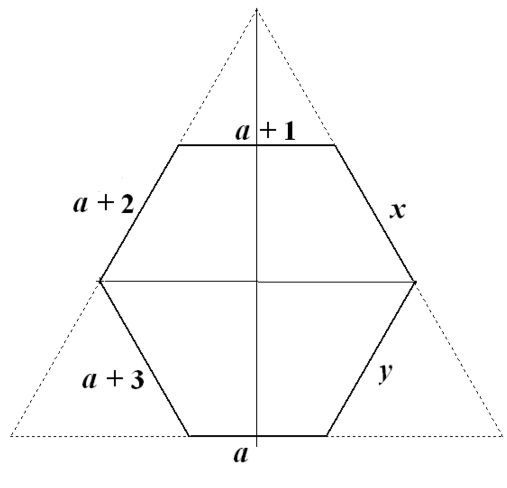
2. Положительное число *a* округлили до ближайшего целого. В результате оно уменьшилось на 33%. Найдите *a*.
Ответ: $1^{33}/_{67}$. ***Решение:*** $a=[a]+\{a\}$, где $n=[a]$ – целая часть числа a, $\{a\}$ – дробная часть числа a, которая согласно условию больше 0, тогда после округления в меньшую сторону получим уравнение $[a]=67a/100$, т.е. $100[a]=67([a]+\{a\})$, откуда $\{a\}=33[a]/67$. Но $0<\{a\}<1$, значит, $0<[a]<67/33$, т.е. $[a]$ равна либо 1, либо 2. В первом случае $\{a\}=33/67$, а само число $a=1^{33}/_{67}$, что удовлетворяет условию округления до ближайшего целого. Во втором случае $\{a\}=66/67$, а само число $a=2^{66}/_{67}$, что не удовлетворяет условию округления до ближайшего целого (этим числом будет 3).

3. Квадрат со стороной 1 раскрашен в два цвета. При каком наибольшем *x* гарантированно найдутся две одноцветные точки на расстоянии, не меньшем *x*?



Ответ: $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ***Решение:*** Пусть точки M и K – середины соответственно сторон BC и CD квадрата $ABCD$ (см. рис.). Рассмотрим замкнутую ломаную $AMDBK$ из 5 звеньев. Т.к. вершин – нечётное число, то вершины этой ломаной не смогут чередоваться по цвету, значит, найдутся, две одноцветные точки – концы одного звена этой ломаной. Тогда расстояние между ними не меньше длины кратчайшего звена этой ломаной $\frac{\sqrt{5}}{2}$, т.к. $AM=MD=BK=KA=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $DB=\sqrt{2}$. Значит, при $x\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$ найдутся одноцветные точки на расстоянии, не меньшем x. Осталось построить пример, который показывает, что полученную оценку на x нельзя увеличить, – разобьём квадрат средней линией на два прямоугольника, один из которых полностью закрасим в чёрный цвет, а второй (без общей границы прямоугольников – средней линии квадрата) – в белый цвет. Тогда максимальное расстояние между точками одного цвета будет равно диаметру прямоугольника, т.е. длине диагонали прямоугольника $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. В выпуклом шестиугольнике с углами по 120° длины четырёх подряд идущих сторон равны *a*, *a*+3, *a*+2, *a*+1 см. Докажите, что у шестиугольника есть ось симметрии.



Доказательство: Пусть следующие две стороны равны x и y. Построим на сторонах $a+3$, $a+1$ и y наружу три равносторонних треугольника. Т.к. углы шестиугольника равны 120°, то получим правильный треугольник, в который вписан исходный шестиугольник. У этого треугольника сторона равна $(a+3)+(a+2)+(a+1)=$ $=(a+1)+x+y=y+a+(a+3)$, откуда $x=a+2$, $y=a+3$. Тогда шестиугольник представляет из себя две соединённые между собой большими основаниями равнобочные трапеции, у которых общая ось симметрии, проходящая через середины оснований трапеций. Эта же прямая и будет осью симметрии всего шестиугольника.

5. Есть два простых числа-близнеца, больших пяти. Докажите, что у их суммы есть не менее пяти собственных делителей. (Близнецы отличаются на 2. Собственные делители отличны от числа и от 1).

***Доказательство*:** Пусть эти простые числа равны $n–1$ и $n+1$, тогда их сумма равна $2n$. Т.к. $n–1$ и $n+1$ – простые числа, большие 5, то они не могут делиться на 2 и 3, значит, число n будет и чётным, и кратным 3, т.е. $n=6k$, где k – натуральное число. Тогда сумма $2n=12k$ (которая к тому же не меньше суммы двух наименьших близнецов, удовлетворяющих условию, 11+13=24), имеет среди собственных делителей числа 2, 3, 4, 6 и 12, т.е. хотя бы 5 собственных делителей.

6. На краю пустыни высадили грузовик и 600 л солярки. В 240 км от этой точки есть оазис. Грузовик может везти (в баках и ёмкостях) не более 240 л солярки, расходуя при этом по литру на километр пути. Можно ездить туда и обратно, выгружая и подбирая солярку по мере необходимости. Может ли грузовик доставить в оазис больше 100 л солярки?

Ответ: Грузовик может, например, доставить 104 л. ***Решение*:** Сначала рейсами туда-обратно-туда-обратно-туда на 24 км он, истратив 120 л, переместит 480 л на отметку 24 км, подвозя за каждый рейс по 160л. Затем рейсами туда-обратно-туда на 80 км он, истратив ещё 240 л, переместит оставшиеся 240 л (первый рейс туда – 80 л, второй – 160 л) на отметку 24+80=104 км. Наконец, загрузив всю солярку, грузовик доедет до оазиса, истратив ещё 136 л. Поэтому останется 104 л солярки.

7. В алфавите племени Пицы-ту 26 букв. Словом считается любая последовательность из шести букв. Первый и Второй по очереди говорят друг другу слова. Каждое слово должно отличаться от любого произнесённого ранее не менее чем в двух местах (скажем, слова *ЧЁ*Р*НЫ*Й и *ЖЁ*Л*Т*ЫЙ отличаются в трёх местах, а *В*ЕКТОР и *С*ЕКТОР – только в одном). За кем может остаться последнее слово, независимо от того, что говорит собеседник?

Ответ: За Вторым. ***Решение*:** Разбив все буквы на пары, Второй заменяет в слове Первого X все буквы на парные им и произносит полученное слово Y. Слова X и Y тоже назовём *парными*, они отличаются в шести местах. А во скольких местах отличается Y от какого-нибудь ранее сказанного слова Z? Во стольких же, во скольких отличается слово X от парного к Z слова T. Но X и T были произнесены ранее, значит, отличаются достаточно. Поэтому Y и Z тоже достаточно отличаются. Это верно для всех ранее сказанных слов Z, поэтому Y может быть произнесено. А так как количество слов конечно – 26^6, то рано или поздно кто-то не сможет произнести слово, но это будет согласно стратегии не Второй, значит, последнее слово останется за Вторым

8. Жильцы дома по очереди выводили своих псов во двор погулять. Два пса, встретившись, дрались, проигравший покидал двор до завтра, а победитель дожидался следующего пса. На следующий день тех же псов выводили гулять в обратном порядке (вчерашний последний стал первым, предпоследний – вторым, и так далее). Драки и прогулка шли по тем же «правилам». Известно, что каждый пёс подрался хотя бы раз каждый день. Докажите, что найдутся два пса, которые дрались между собой и в первый день, и во второй.

***Решение*:** Пусть пёс *А* был последним в очереди в первый день и свою первую драку устроил с псом *Б*. Тогда *Б* – либо предпоследний, либо выиграл у всех, кто стоял в очереди между ним и *А*. Тем самым, *Б* подрался со всеми, кто стоял в очереди после него. На следующий день все эти псы (и только они!) окажутся в очереди впереди *Б*, поэтому свою первую драку он устроит с кем-то из них, что и окажется повторной дракой.