IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
VIII Южный математический турнир.

Старт-лига. 3 тур. 21 сентября 2013 года. *Решения*.

1. Сколько различных слагаемых останется, если раскрыть скобки и привести подобные в следующем выражении $(1+x^2+x^4+\ldots+x^{200})^3+(1+x^3+x^6+\ldots+x^{300})^2$?

Ответ: 401. ***Решение:*** При возведении в 3-ю степень первой суммы, т.е. при умножении трёх одинаковых скобок, мы можем получить только слагаемые со знаком «+» в чётных степенях от 0 до 600 (считаем, что $1=x^0$), т.к., во-первых, степени были изначально только чётные, во-вторых, любая чётная степень этого промежутка $200k+2n$, где $k\le 3$ и $n\le 99$ – целые неотрицательные числа, получится при взятии x^{200} из k скобок, x^{2n} из одной скобки, а из остальных скобок берём 1 (при этом всегда берём ровно 3 множителя). При возведении в квадрат второй суммы, т.е. при умножении двух одинаковых скобок, мы можем получить только слагаемые со знаком «+» в степенях от 0 до 600, кратных 3, (считаем, что $1=x^0$), т.к., во-первых, степени были изначально только кратные 3, во-вторых, любая такая степень этого промежутка $300k+3n$, где $k\le 2$ и $n\le 99$ – целые неотрицательные числа, получится при взятии x^{300} из k скобок, x^{3n} из одной скобки, остальное добираем 1 (при этом всегда берём ровно 2 множителя). При приведении подобных слагаемых все такие степени сохранятся, т.к. перед всеми слагаемыми был знак «+». Значит, нам надо посчитать суммарное количество чётных и нечётных кратных 3 чисел в промежутке от 0 до 600. Чётных чисел – 301, нечётных кратных 3 – 100 (ровно половина от кратных 3 в промежутке от 1 до 600).

2. 189 котов живут у 12 разных хозяек. Каждый кот по разу вступал в поединки со всеми котами, живущими у чужих хозяек. Каково наименьшее возможное число поединков?

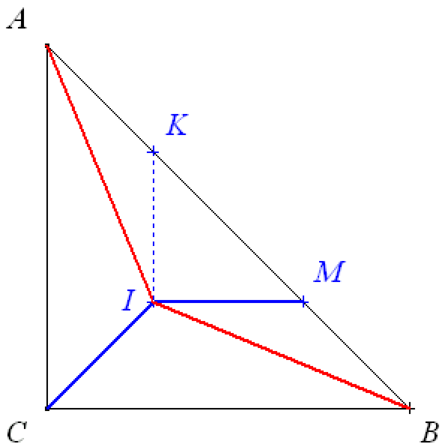
Ответ: 2013. ***Решение* 1:** Пусть у каждой хозяйки есть кот-любимчик, тогда каждый из 177 других котов (нелюбимчиков) встретился в 11 поединках с любимчиками других 11 хозяек, что даёт $177\cdot 11=1947$ поединков. Кроме того, ещё были $C_{12}^2=\dfrac{12!}{2!\cdot 10!}=\dfrac{12\cdot 11}{2}=66$ поединков между любимчиками. Значит, уже было не менее $1947+66=2013$ поединков. Ровно 2013 поединков действительно могло быть, если у 11 хозяек будет по одному коту, а у одной хозяйки – 178 котов.

***Решение* 2: (*для будущего умения пользоваться методом Штурма*)** Пронумеруем хозяек числами от 1 до 12 и пусть у хозяек было соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_{12}$ котов. Тогда кот хозяйки с номером i подрался со всеми котами, кроме k_i котов своей хозяйки, т.е. участвовал в $189-k_i$ поединках. Значит, всего было $P=(k_1(189-k_1)+$ $+k_2(189-k_2)+\ldots+k_{12}(189-k_{12}))/2$ поединков, т.к. каждый поединок мы учитываем два раза – для каждого из котов, участвующих в поединке. Раскроем скобки и вынесем общий множитель 189 и учтём, что $k_1+k_2+\ldots+k_{12}=189$. Тогда получим, что $P=(189^2-(k_1^2+k_2^2+\ldots+k_{12}^2))/2$. Значит, нам надо найти максимум суммы квадратов чисел при их фиксированной сумме (189). Согласно классической лемме, применяемой при решении задач методом Штурма, при сближении чисел с фиксированной суммой сумма их квадратов убывает. Значит, для увеличения суммы квадратов надо раздвигать числа, т.е. максимум суммы квадратов при соблюдении условия натуральности чисел будет при наборе из 11 единичек и числа 178. Тогда $P=(189^2-(178^2+11))/2=((189-178)(189+178)-11)/2=11\cdot 366/2=2013$.

3. Три вора – Камнев, Ножницын и Бумагин, каждый с несколькими баулами, хотят переправиться через реку. Известно, что Камнев обворует любой баул Ножницына, если баул останется без присмотра кого-нибудь из остальных. Так же Ножницын обворует баул Бумагина, а Бумагин – баул Камнева. Есть трехместная лодка, место занимает человек или баул. Грести может только Камнев. Как им всем переправиться и перевезти баулы, чтобы никто никого не обворовал? (На пустынном берегу баулы в безопасности)

Решение: Заметим, что под охраной двух воров баулы тоже в безопасности. Сначала Камнев перевозит на другой берег свои баулы. Затем сажает в лодку Ножницына и вместе с ним по одному перевозит баулы Ножницына. Наконец, высадив Ножницына на другой берег, Камнев привозит туда Бумагина с баулом, и последними рейсами доставляет туда баулы Бумагина.

4. Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на 4 треугольника так, чтобы три из них были равны между собой, и любым из этих трёх можно было накрыть не равный им четвёртый.



***Решение*:** Рассмотрим (см. рис.) точку I пересечения биссектрис нашего равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C$=90°) (I – центр вписанной окружности треугольника). Тогда треугольники ACI и BCI равны по двум сторонам и углу между ними (AC=BC, CI – общая, $\angle ACI$=$\angle BCI$). Пусть точки M и K симметричны точке C относительно биссектрис AI и BI соответственно. Тогда треугольники ACI и AMI равны как симметричные относительно AI , а треугольники BCI и BKI равны как симметричные относительно BI, т.е. все эти четыре треугольника равны между собой (выше доказано равенство треугольников ACI и BCI). Значит, если мы разрежем исходный треугольник на треугольники ACI, BCI, AMI и BMI, то первые три треугольника равны между собой, а четвёртый треугольник накрывается каждым из этих трёх, т.к. треугольник BMI является частью равного им треугольника BKI.

5. Какое наименьшее число ладей можно расставить на клетчатой доске 100×100 так, чтобы каждое свободное поле было побито ровно тремя ладьями? (Ладья бьёт поля по горизонтали и вертикали, если между ней и полем нет других ладей.)

Ответ: 200, например, когда ладьи стоят на всех клетках обеих главных диагоналей.

Решение 1: Если ладей менее 200, то отметим строку с не более чем одной ладьёй, и такой же столбец. На их пересечении должна стоять ладья, иначе эта клетка будет побита не более двух раз. Остальные клетки отмеченных рядов пусты. За вычетом отмеченных рядов доска делится на 4 прямоугольника. Заметим, что из-за четности соседние прямоугольники не равны, поэтому не все прямоугольники – квадраты. Пустые клетки отмеченной вертикали побиты трижды: один раз по вертикали, и дважды по горизонтали с обеих сторон. Значит, число ладей в каждом из прямоугольников не меньше числа горизонталей в нем, а общее число ладей в прямоугольниках не меньше удвоенного числа неотмеченных горизонталей $2\cdot99$. Аналогично, число ладей в прямоугольнике не меньше числа вертикалей. Мы знаем, однако, что в каком-то прямоугольнике вертикалей и горизонталей не поровну.

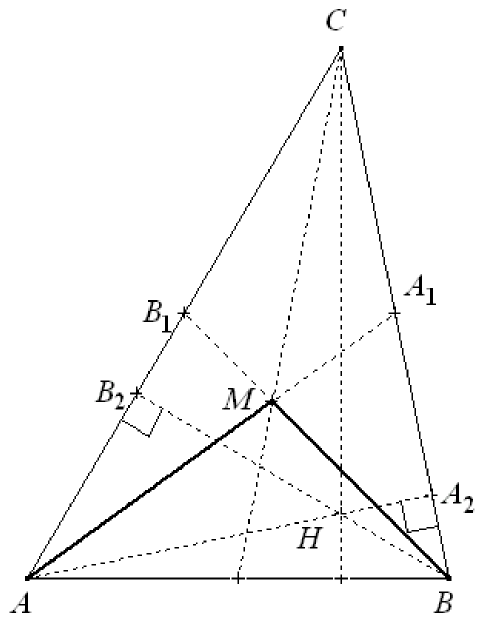
Пусть, скажем, в нём вертикалей больше. Тогда ладей в нём больше чем горизонталей. Но тогда и общее число ладей в неотмеченных рядах больше 2·99, то есть не менее 199. Вместе с ладьей на пересечении отмеченных получаем не менее 200 ладей.

***Решение 2*:** Предположим, что ладей на доске не более 199. Заметим, что не бывает пустого ряда (вертикали или горизонтали), иначе любая клетка этого ряда бьётся максимум с двух направлений, т.е. максимум двумя ладьями. Если ладей не более 199, то по принципу Дирихле существует *особая* вертикаль, в которой ровно 1 ладья. Тогда для каждой из остальных 99-и клеток этой особой вертикали есть свои ладьи слева и справа, т.е. и в левых, и правых вертикалях (образующих два прямоугольника) относительно особой вертикали стоит не менее 99 ладей. Но тогда по принципу Дирихле в одном из этих прямоугольников будет не более 49 вертикалей и найдётся вертикаль, в которой не менее 3-х ладей. Теперь рассмотрим горизонтали. Аналогично, найдётся *особая* горизонталь, в которой ровно 1 ладья, а в каждой из вертикалей, пересекающих эту горизонталь по пустым клеткам будет не менее двух ладей, но в одной из вертикалей (как было доказано выше) будет не менее трёх ладей, значит, на доске не менее 1+3+98·2=200 ладей. Противоречие. Значит, действительно на доске не менее 200 ладей.

6. Можно ли расставить на рёбрах куба 12 последовательных натуральных чисел так, чтобы суммы на тройках рёбер с общей вершиной были одинаковыми?

***Ответ*:** Нельзя. ***Решение*:** Предположим, что мы смогли расставить последовательные числа n–5, n–4, …, n+6 (n – целое число) нужным образом так, что в каждой тройке будет одна и та же целая сумма S. Тогда каждое число будет участвовать в двух тройках, а общая сумма всех восьми троек 8S будет равна удвоенной сумме (равной 12n+6) всех чисел не рёбрах. Получаем уравнение 8S=2(12n+6), откуда S=3n+1,5 – нецелое число. Противоречие.

7. В остроугольном треугольнике *ABC* сторона *AB* – наименьшая, *M* и *H* – точки пересечения медиан и высот соответственно. Докажите, что *H* лежит внутри треугольника *AMB*.



Доказательство: Пусть AA_1, BB_1 – медианы, AA_2, BB_2 – высоты. Т.к. $AB<AC$, то точка B находится в одной полуплоскости с точкой A относительно серединного перпендикуляра к стороне AC, значит, основание высоты B_2 расположено между точками A и B_1. Аналогично, A_2 расположена между точками B и A_1. Тогда луч AA_2 идёт внутри острого угла BAA_1, а луч BB_2 идёт внутри острого угла ABB_1. Значит, точка H пересечения лучей AA_2 и BB_2 (точка пересечения высот) окажется внутри треугольника ABM, ограниченного лучами AA_1, AA_2 и прямой AB.

8. Восемь шахматистов сыграли турнир в один круг. Давали 1 очко за победу, 0,5 очка за ничью, 0 за поражение. После этого они же разыграли кубок по олимпийской системе: разбились на пары, проигравшие выбыли, выигравшие снова разбились на пары, и т.д. Все кубковые встречи закончились так же, как

встречи тех же игроков в турнире, ничьих не было. Могло ли случиться, что кубок выиграл шахматист, набравший в турнире меньше всех очков?

<u>Ответ</u>: Могло. ***<u>Решение</u>*:** Рассмотрим следующий вариант турнира (см. таблицу), тогда кубок мог пройти по следующей схеме (четвертьфинал – пары *AH*, *BG*, *CF*, *DE*, далее прошли *H*, *G*, *F*, *E*; полуфинал – пары *EH*, *FG*, далее прошли *H* и *G*; в финале выиграл *H*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	Sum
A		1	1	1	1	0	0	0	4
B	0		1/2	1	0	1	0	1	3,5
C	0	1/2		0	1	0	1	1	3,5
D	0	0	1		0	1	1/2	1	3,5
E	0	1	0	1		1/2	1	0	3,5
F	1	0	1	0	1/2		0	1	3,5
G	1	1	0	1/2	0	1		0	3,5
H	1	0	0	0	1	0	1		3

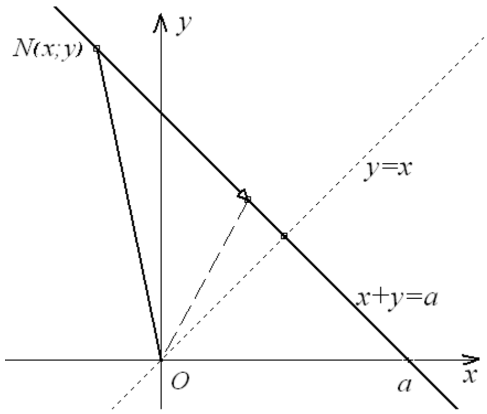
Доказательство леммы к задаче 2 при решении методом Штурма.

Лемма: При сближении двух действительных чисел с фиксированной суммой их сумма квадратов убывает.

***<u>Доказательство</u>* <u>1 (Δ-доказательство):</u>** Будем считать, что мы сближаем числа x и y, где $x<y$. Пусть x увеличили на Δ, тогда y уменьшили на Δ, т.к. сумма чисел осталась неизменной. Тогда $x+\Delta\le y-\Delta$, значит, $0<\Delta\le(y-x)/2$. Рассмотрим разность прежней и новой суммы квадратов: $x^2+y^2-(x+\Delta)^2-(y-\Delta)^2=2\Delta(y-x-\Delta)>0$. Значит, новая сумма квадратов будет меньше, следовательно, сумма квадратов убывает при сближении чисел с фиксированной суммой.

***<u>Доказательство</u>* <u>2 (формульное):</u>** Заметим, что сумма квадратов является функцией, зависящей от суммы и разности чисел: $x^2+y^2=((x+y)^2+|y-x|^2)/2$, где в числителе сумма двух неотрицательных чисел, первое из которых является константой, а второе – убывает. Значит, и весь числитель убывает, значит, и вся дробь убывает, т.е. сумма квадратов двух чисел убывает при сближении чисел с фиксированной суммой.

***<u>Доказательство</u>* <u>3 (графически-геометрическое):</u>** Снова будем считать, что мы сближаем числа x и y, где $x<y$. Заметим, что $\sqrt{x^2+y^2}$ является расстоянием от точки N с координатами $(x;y)$ до начала координат (или длиной вектора $\overrightarrow{ON}$). При этом точка N будет двигаться по прямой $x+y=\text{const}=a$ из области, находящейся выше биссектрисы первого координатного угла ($y=x$), к точке пересечения этих двух прямых (см. чертёж). Тогда расстояние от точки N до начала координат будет уменьшаться, значит, и сумма квадратов x^2+y^2 будет убывать.



***<u>Доказательство</u>* <u>4 (графически-функциональное):</u>** Будем считать, что мы сближаем числа a и b, где $a<b$. Рассмотрим график функции $y=x^2$, который будет выпуклым вниз. Рассмотрим точки $A(a;a^2)$, $B(b;b^2)$ и точки, получаемые при сближении a и b, – $A_1(a+\Delta;(a+\Delta)^2)$, $B_1(b-\Delta;(b-\Delta)^2)$, где $a+\Delta\le b-\Delta$, значит, $0<\Delta\le(b-a)/2$. Тогда середины отрезков AB и A_1B_1 – точки M и M_1 соответственно будут иметь одну и ту же абсциссу $x=(a+b)/2$, но при этом хорда AB будет выше хорды A_1B_1, значит, ордината точки M будет больше ординаты точки M_1, т.е. $(a^2+b^2)/2>((a+\Delta)^2+(b-\Delta)^2)/2$, откуда и следует требуемое нам убывание суммы квадратов.