**IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».**
**VIII Южный математический турнир.**

**Старт-лига. IV тур. Полуфинал. 22 сентября 2013 года. *Решения*.**

**1. Двое играющих по очереди пишут каждый на своем листке натуральные числа (возможно, повторяющиеся) так, чтобы сумма всех чисел на обоих листках не превосходила 10000. Игра заканчивается, когда сумма станет равной 10000. После этого каждый подсчитывает сумму всех цифр на своём листке. Выигрывает тот, у кого сумма меньше. Может ли кто-нибудь из игроков выигрывать, как бы не играл противник?**

***Ответ:*** Выигрывает второй. ***Решение:*** На числа 1 и 100 он отвечает 10, а на все остальные числа отвечает 1. Если в какой-то момент первый напишет число с суммой цифр больше 1, то второй потом всегда пишет 1. В этом случае его сумма цифр заведомо меньше. Пусть теперь первый всегда писал только числа 1, 10, 100 и 1000. Тогда после ответа второго сумма всех выписанных чисел всегда делилась на 11, после ходов первого 1 и 100 сумма при делении на 11 давала остаток 1, а после ходов 10 и 1000 – остаток 10. Поэтому после ходов первого 1 и 100 сумма либо равна 10000, либо не более 9989, и ход второго 10 – *возможен*. Значит, действуя по этой стратегии, второй сделает на один ход меньше, и его сумма цифр будет на 1 меньше первого, чем у первого.

**2. В магазине есть плитки шоколада нескольких названий, каждое название – своего веса (не менее 100г). Известно, что сколько бы грамм шоколада не попросил покупатель (но не менее 100г), можно выдать ему плитками вес, отличающийся от запрошенного (в ту или другую сторону) не более чем на 20%. Какое наименьшее число названий шоколада может быть в магазине?**

***Ответ:*** 2, например, плитки по 100 и 150 грамм. ***Решение*:** если запрошен вес $Z$, то суммарный вес $V$ выданных плиток должен оказаться в промежутке $[0{,}8Z;1{,}2Z]$, значит, должно выполняться неравенство $5V/6 \le Z \le 1{,}25V$. Тогда, если есть плитки только одного веса $a$, то вес $1{,}5a$ нельзя выдать плитками с точностью 20%. Значит, нужны плитки как минимум двух видов. Покажем, что можно обойтись только плитками по 100 и 150 г. Тогда с помощью $V$=100 мы удовлетворим потребности при $Z\in[100;125]$, $V$=150 $\to Z\in[125;187{,}5]$, $V=200=2\cdot100 \to Z\in[166+1/6;250]$, $V=300=3\cdot100 \to Z\in[250;375]$, $V=400=4\cdot100 \to Z\in[333+1/3;500]$, $V=600=6\cdot100 \to Z\in[500;750]$. А при $V=100n$, где $n$ – натуральное число, не меньшее 7, мы сможем удовлетворить потребности в промежутке, большем, чем $[100(n-1);100(n+1)]$. Таким образом, мы сможем выдать любой вес, не меньший 100г, с соблюдением условия.

**3. Число представлено как сумма 99 различных простых чисел. Докажите, что его можно представить как сумму 100 различных составных чисел.**

***Решение:*** Упорядочим исходные 99 различных простых чисел по возрастанию. Рассмотрим первые 13 простых чисел нашего набора, тогда их сумма будет не меньше суммы 13-ти самых маленьких простых чисел 2+3+5+7+11+13+17+19+23+29+ +31+37+41=238, что равно сумме 14-ти наименьших чётных составных чисел 4+6+8+10+12+14+16+18+20+22+24+26+28+30=238. Тогда первые 13 простых чисел можно будет заменить на 14 составных чисел с учётом присутствия в исходном наборе простых чисел единственного чётного простого числа 2. Если 2 есть, то сумма первых 13 простых чисел набора будет чётной, тогда заменим их на приведённый выше набор 14-ти чётных составных. Если 2 нет, то сумма первых 13 простых чисел набора будет нечётной, превосходящей 238, тогда заменим их на набор с меньшей нечётной суммой, когда вместо числа 30 возьмём число 15. Таким образом, нами доказано, что первые 13 простых чисел можно заменить на 14 составных с суммой, меньшей или равной сумме заменённых чисел. При этом остальные 99–13=86 простых нечётных чисел дают чётную сумму и идут с числа, не меньшего 43, с шагом минимум 2. Начнём каждое из них по очереди заменять на чётные составные числа, начиная с 32. Тогда на каждом шаге замены мы вместо простого числа ставим меньшее составное, значит, после 98-го заменённого простого числа нами будет написан набор из 99 составных чисел с суммой, меньшей суммы 98-и простых на некоторое нечётное натуральное число $R$. Поэтому 99-е простое число заменим на чётное составное число (100-е в нашем списке), превышающее данное простое число на $R$. При этом оно будет и больше всех написанных на данный момент составных чисел.

**4. Из бумаги 4 цветов вырезаны несколько правильных треугольников разных размеров (каждый треугольник – одного цвета). Они положены на плоскость так, чтобы их стороны были параллельны. Известно, что любые два треугольника разного цвета имеют общую точку (то есть, перекрываются или соприкасаются). Докажите, что для какого-то цвета любые два треугольника имеют общую точку.**

***Решение*:** Если два треугольника не имеют общих точек, их можно отделить прямой, параллельной какой-то стороне. Допустим противное. Выберем для каждого цвета пару непересекающихся треугольников, и отделим их прямой, параллельной сторонам. Из 4 прямых какие-то две будут параллельны. Вне полосы между ними окажутся две полуплоскости, в них лежат непересекающиеся треугольники разного цвета.

**5. На шахматной доске 5×5 в начале игры находился белый король в углу и 10 черных ладей. Ходили строго по очереди: сначала король, затем одна из ладей, опять король, одна из ладей, король и т.д. Король, ни разу не попав под шах, перешел в противоположный угол. Какое наименьшее число ходов он мог сделать? (Король мог есть ладей.)**

***Ответ:*** 13 ходов, например, когда король на a1, ладьи на b2 и в верхнем правом квадрате 3×3. Ходы: 1.b2 a5 2.b1 a2 3.a2 e1 4.b2 a1 5. a1 d2 6. b1 a2 7.a2 e1 8. b2 a4 9.c3 da5 10.b2 aa1 11.c3 eb1 12.d4 5a2 13.e5. ***Доказательство оценки:*** Назовём вертикали b,c,d,e и горизонтали 2,3,4,5 *важными* рядами. Сначала король на важных рядах не бывал, а каждая из ладей стоит на двух важных рядах. Свяжем каждую ладью с важными рядами, где она изначально стоит. Всего есть 20 связей. При первом появлении короля на важном ряду будем добавлять королю по очку, если же он появился на клетке, находящейся сразу в двух новых для себя важных рядах, то соответственно добавляем ему 2 очка. К концу у короля будет 8 очков, а все связи ладей должны исчезнуть. Связь исчезает либо из-за ухода ладьи с ряда (не более одной связи за ход), либо за счет съедания ладьи (каждая связь переходит в очко). Так как король съест не более 8 связей, то ладьи сделают не менее 20–8=12 ходов. Первым и последним ходит король, поэтому он сделает не менее 13 ходов.

**6. В четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями отмечены две стороны. Оказалось, что каждая из них равна полусумме двух соседних. Докажите, что это – ромб.**

<u>***Доказательство***</u>: Предположим, что существует невыпуклый ($\angle K > 90°$) четырёхугольник *MNKL*, удовлетворяющий условию. Тогда отобразим точку *K* симметрично относительно диагонали *NL* и новый полученный четырёхугольник *MNK'L* станет выпуклым, удовлетворяющим условию (см. рис.1). Если же мы докажем, что такой выпуклый четырёхугольник может оказаться только ромбом, значит, исходный четырёхугольник не мог быть невыпуклым. Обозначим по часовой стрелке длины сторон нашего выпуклого многоугольника *ABCD* как $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$, $d=DA$, причём сторону *AB* длины а будем считать отмеченной. Тогда возможны 2 случая: ещё отмечена либо сторона длины *b*, либо сторона длины *c*. <u>*1 случай*</u> (ещё отмечена сторона длины *b*). Тогда $a=(b+d)/2$, $b=(a+c)/2$. Сложим эти равенства и получим, что $a+b=c+d$. Отобразим точку *D* относительно *A*C (см. рис.2), получим, что точка *D'* и *B* должны совпасть, иначе в силу перпендикулярности *AC* и *BD* либо *B* будет внутри треугольника *AD'C*, либо *D'* будет внутри треугольника

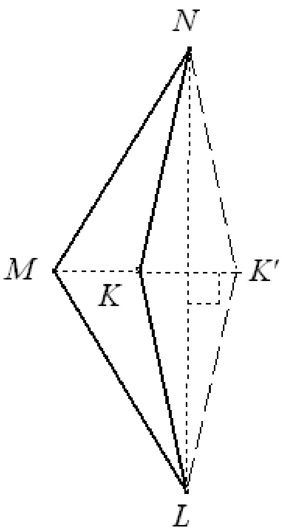


**рис.1**

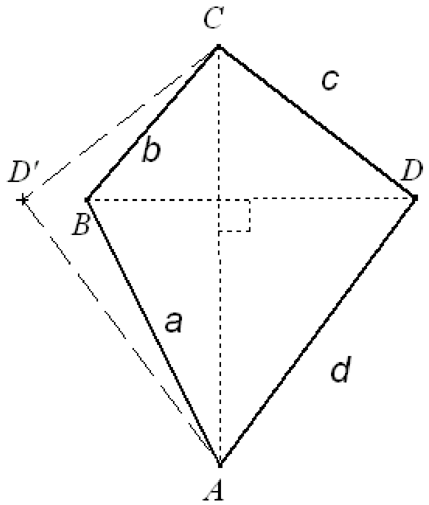


**рис. 2**

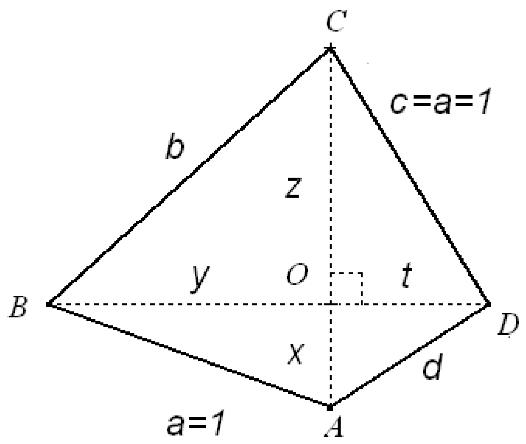


**рис.3**

*ABC*, и тогда $a+b=AB+BC \neq AD'+D'C=AD+DC=d+c$ – что противоречит равенству $a+b=c+d$. Здесь мы воспользовались знаменитым фактом, доказываемым с помощью неравенства треугольника, о том, что если точка *P* лежит внутри треугольника *XYZ*, то $XY+YZ>XP+PZ$. Значит, в силу совпадения точек *D'* и *B*, получаем, что $AB=AD$ и $BC=DC$, т.е. наш четырёхугольник – дельтоид со сторонами дли *a*, *b*, $c=b$, $d=a$. Тогда из исходных равенств $a=(b+d)/2$, $b=(a+c)/2$ следует, что $a=(b+d)/2=(b+a)/2=(c+a)/2=b$, т.е. наш четырёхугольник – ромб. <u>*2 случай*</u> (ещё отмечена сторона длины *c*). Тогда $a=(b+d)/2=c$. Для удобства будем считать, что $a=c=1$. Пусть *O* – точка пересечения диагоналей, $AO=x$, $BO=y$, $CO=z$, $DO=t$ (см. рис.3), тогда из теоремы Пифагора для имеющихся у нас четырёх прямоугольных треугольников следует, что $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z^2+t^2}=1=\dfrac{\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{t^2+x^2}}{2}$. Но по неравенству между средним арифметическим и средним квадратическим получим, что

$$1=\frac{\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{t^2+x^2}}{2} \le \sqrt{\frac{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2+\left(\sqrt{t^2+x^2}\right)^2}{2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{2}}=\sqrt{\frac{2}{2}}=1,$$

т.е. между средним арифметическим и средним квадратическим должно быть равенство, что выполняется только при равенстве чисел, т.е. $\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{t^2+x^2}$. Значит, $b=d$. Тогда с учётом равенства $a=(b+d)/2$ получим, что $a=b$, т.е. все стороны нашего четырёхугольника равны между собой, т.е. он – ромб.

**7. Петя пишет число *m*, а затем Вася, видя *m*, пишет два положительных числа *a* и *b*. Если выполнены оба неравенства $a^2 + 4/b^2 < m$ и $b^2 + 4/a^2 < m$, выиграл Вася, иначе – Петя. При каком наибольшем *m* Петя всегда выигрывает?**

***Ответ:*** при $m=4$. ***Доказательство:*** Рассмотрим сумму двух данных сумм и воспользуемся неравенством Коши: $a^2+\frac{4}{b^2}+b^2+\frac{4}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{4}{a^2}}+2\sqrt{b^2\cdot\frac{4}{b^2}}=8$. Значит, по принципу Дирихле хотя бы одна из данных сумм будет не меньше 8/2=4, тогда при $m=4$ Вася проигрывает. Если же Петя напишет число $m>4$, то Вася напишет $a=b=\sqrt{2}$ и обе его суммы будут равны 4, т.е. оба неравенства будут выполняться, что приведёт к победе Васи.

**8. В дачном поселке из животных есть только псы и коты. У кота в среднем втрое больше знакомых среди котов, чем среди псов. У пса в среднем впятеро больше знакомых среди псов, чем среди котов. У пса среднее число знакомых животных вдвое больше, чем у кота. Кого в поселке больше: котов или псов, и во сколько раз?**

***Ответ:*** Котов больше в 4/3 раза. ***Решение:*** Рассмотрим граф, в котором вершины – коты и псы, рёбра – знакомства. Пусть количество рёбер между котами равно $a$, между псами – $b$, между группой котов и группой псов – $c$; количество самих котов – $k$, количество псов – $p$. Тогда у кота среднее количество знакомых среди котов равно $2a/k$, т.к. каждое ребро знакомства между котами надо учесть дважды (для каждого из котов), а среди псов – $c/k$, т.к. каждое ребро знакомства котов с псами теперь учитываем по одному разу; аналогично у пса среднее количество знакомых среди псов равно $2b/p$, а среди котов – $c/p$; у кота среднее количество знакомых среди животных равно $(2a+c)/k$; у пса среднее количество знакомых среди животных равно $(2b+c)$/р. Тогда из условия задачи следует система уравнений: $2a/k=3c/k$, $2b/p=5c/p$, $(2b+c)/p=2(2a+c)/k$. Подставляем полученные из первых двух уравнений равенства $2a=3c$ и $2b=5c$ в третье уравнение. Тогда $6c/p=8c/k$, откуда $k/p=4/3$.